APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK
N°2 GIUGNO 2010

T E M I

Caos deterministico, modelli matematici e previdibilità

di Gian-Italo Bischi

ABSTRACT – Il saggio fornisce una introduzione al concetto di caos deterministico, invitando il lettore a scoprirne operativamente le principali caratteristiche e cercando nel contempo di mettere in luce gli sviluppi storici e alcuni temi di dibattito filosofico ed epistemologico ad esso collegati. In particolare discute la distinzione fra rappresentazione matematica, determinismo e prevedibilità nei sistemi dinamici non lineari, e come questo si riflette nei vari settori della scienza in cui la modellistica dinamica gioca un ruolo importante.

1. INTRODUZIONE

La scoperta del caos deterministico, nell'ambito della teoria matematica dei sistemi dinamici non lineari[1], e la ricerca di una sua definizione rigorosa, hanno innescato un ampio dibattito anche in ambito filosofico. In letteratura si trovano ampie discussioni sulle difficoltà incontrate nel conciliare le diverse definizioni proposte nella letteratura fisico-matematica (si vedano ad esempio Batterman, 1993, Smith, 1998), sul problema di quanto le dinamiche caotiche siano utili per descrivere l'evoluzione di sistemi reali (Judd e Smith, 2001, 2004, Smith, 1998, Koperski, 1998, 2001, Earman, 2007) e come le caratteristiche geometriche dei sistemi caotici possano aiutarci a comprendere andamenti scarsamente prevedibili (Kellert, 1993). Il dibattito filosofico si spinge fino ai rapporti fra determinismo e libero arbitrio, alla luce della capacità dei sistemi dotati di caos deterministico di amplificare perturbazioni arbitrariamente piccole (Kane, 1996).

Dopo che negli anni 80 e 90 del secolo scorso si era parlato di una "rivoluzione" nel modo di studiare molte discipline scientifiche, dalla fisica alla chimica, dalla biologia alle scienze sociali, innescata dalla scoperta del caos deterministico ("un nuovo paradigma" come affermato da Gleick, 1987, Stewart, 2002) ora diversi studiosi di filosofia della scienza esprimono dubbi sulla reale portata del concetto di caos deterministico e riflettono sulle sue implicazioni pratiche (si vedano, ad esempio, Leiber, 1998, Smith, 1998).

Gli obiettivi di questo articolo consistono nel fornire innanzi tutto una semplice introduzione al caos deterministico, evitando matematica avanzata e definizioni troppo formali,

[1] Si vedano ad esempio Guckenheimer and Holmes [1983], Devaney [1990], Alligood et al. [1997], Bertuglia e Vaio [2003], Bischi et al. [2004].

invitando il lettore a scoprirne operativamente le principali caratteristiche, e poi mettere in luce alcune implicazioni di tipo filosofico ed epistemologico. In particolare, si cercherà di discutere la distinzione fra determinismo e prevedibilità, distinzione che, come vedremo, è legata alla proprietà di certi sistemi deterministici non lineari di amplificare in modo difficilmente prevedibile perturbazioni arbitrariamente piccole, la cosiddetta sensitività rispetto alle condizioni iniziali. Questa proprietà, abbastanza ovvia e comunemente osservata nella vita di ogni giorno, è stata solo recentemente messa in luce e opportunamente definita in termini matematici, nell'ambito della teoria dei sistemi dinamici.

Il termine *caos deterministico*, scelto per identificare questo fenomeno, si presenta come un ossimoro. Infatti "caos" significa assenza di regole, irregolarità, imprevedibilità, mentre "deterministico" significa regolare, prevedibile, e viene riferito a fenomeni ordinati e pianificabili. Un fenomeno descritto mediante un modello matematico deterministico, ovvero attraverso il calcolo di una funzione che da un input permette di determinare un unico output, viene in genere considerato prevedibile. Ma la scoperta del caos deterministico mette in crisi questa affermazione: modelli matematici non lineari e deterministici, cioè privi di termini stocastici, possono generare andamenti in apparenza imprevedibili e estremamente sensibili a piccole (anche impercettibili) perturbazioni. Da un lato, questo diminuisce la capacità di fare previsioni mediante modelli matematici quando questi sono non lineari; dall'altra suggerisce che fenomeni del mondo reale che ci appaiono del tutto aleatori, quindi non adatti a essere rappresentati mediante modelli matematici deterministici, potrebbero in realtà essere governati da equazioni ben precise, sebbene non lineari.

Il termine "caos" è stato per la prima volta utilizzato, nel suo significato matematico, in un articolo di Li e Yorke [1975], ma il concetto e le sue proprietà erano già stati descritti fin dai primi del Novecento da Poincaré. Egli, nello sforzo di descrivere il moto di tre corpi che interagiscono mediante forze gravitazionali, aveva descritto con estrema chiarezza la sensitività delle traiettorie rispetto a piccole variazioni delle condizioni iniziali, e aveva introdotto quei metodi ora noti come qualitativi (o topologici) per lo studio dei sistemi dinamici. Questi studi erano poi proseguiti negli anni 20 grazie alla scuola francese (legata ai nomi di Hadamard e Julia) e americana (Birkhoff) e poi soprattutto con la scuola russa dagli anni 40 a fine secolo (Andronov, Pontriaguine, Kolmogorov, Sinai, Arnold) che ha introdotto i concetti di stabilità strutturale e biforcazioni.

Due i grandi traguardi da ricordare negli anni '60 e '70. Smale [1967] ha spiegato rigorosamente il meccanismo geometrico di "stretching & folding", che sta alla base del caos deterministico, attraverso quella funzione che ora è nota come "ferro di cavallo di Smale" ("Smale Horseshoe"); Ruelle e Takens [1971] hanno utilizzato le proprietà delle dinamiche caotiche per fornire una spiegazione dell'insorgere della turbolenza nei fluidi, un problema che per anni aveva messo in crisi la fisica-matematica.

Nel frattempo i risultati e i metodi della teoria qualitativa dei sistemi dinamici si erano diffusi anche al di fuori della ristretta cerchia di matematici e fisici, fino a coinvolgere studiosi di scienze biologiche e sociali e persino la stampa non specializzata. Questo avveniva soprattutto grazie ai lavori del matematico e meteorologo Edward Lorenz [1963], che ha descritto con efficacia le conseguenze pratiche del caos deterministico fino a coniare la metafora dell'*effetto farfalla* (Lorenz, 1972) per indicare un evento di grande portata innescato da una causa quasi insignificante.

Non si tratta certamente di un'idea nuova: anche Aristotele, discutendo di epistemologia, aveva notato che "la minima deviazione dalla verità viene poi moltiplicata migliaia di volte in seguito"[2]. E in effetti si tratta di situazioni molto comuni ed enfatizzate da molti autori anche al di fuori della letteratura scientifica e filosofica. Ad esempio nel 1842 Edgar Alan Poe, ne "Il mistero di Marie Rogêt", atto di nascita del romanzo poliziesco, avvertiva il lettore che "*Per quanto riguarda l'ultima parte della supposizione, si dovrà considerare che la più insignificante differenza nei fatti delle due vicende potrebbe dar luogo ai più importanti errori di calcolo, facendo divergere radicalmente le due sequenze dei fatti; proprio come in aritmetica un errore che in sé non ha valore, alla fine, moltiplicandosi da un punto all'altro del procedimento, produce un risultato lontanissimo dal vero*."

Più recentemente Carlo Emilio Gadda [1953], nel racconto "L'egoista" aveva usato una metafora molto simile a quella di Lorenz quando, parlando di complessità, scriveva "*Se una libellula vola a Tokio, innesca una catena di reazioni che raggiungono me*". Ma la complessità intesa nel senso di Gadda è ben diversa, e in un cerro senso meno stupefacente, di quella espressa dal concetto di caos deterministico. Infatti, nella sua "Meditazione milanese" Gadda [1974] mette in relazione questa amplificazione di piccoli effetti con la complessità delle concatenazioni che legano fra loro i sistemi, e scrive che "*L'ipotiposi della catena delle cause va emendata e guarita, se mai, con quella di una maglia o rete. Ogni anello o grumo o groviglio di relazioni è legato da infiniti filamenti a grumi o grovigli infiniti*". Arriva poi alla metafora degli gnocchi "*unti, agglutinati, filamentosi per formaggio e per salse, e uno cento ne traina, e ognuno dei cento poi mille e ognuno dei mille, milioni: e così* ***in infinitum****. Altro che le ciliegie, delle quali sogliono li esperti affermare che una tiri l'altra!*"

[2] Citazione tratta da Stanford Encyclopedia of Philosophy, http://plato.stanford.edu/entries/chaos/, che a sua volta cita: Aristotele [OTH. 271b8] in J. Barnes editor (1985), *The Complete Works of Aristotle: The Revised Oxford Translation*, Vol 1. Princeton: Princeton University Press.

È fin troppo ovvio osservare che sistemi molto complicati e fortemente interconnessi possono essere estremamente sensibili a piccole perturbazioni, e reagiscono a queste amplificandole e \quindi generando effetti che appaiono talvolta imprevedibili e incontrollabili. Invece nello studio del caos deterministico si dice una cosa ben diversa, e non banale: anche modelli semplici possono avere comportamenti molto complicati. Questo era il messaggio di Lorenz [1963] che mostrò l'insorgere del caos deterministico in un semplice sistema di tre equazioni differenziali in cui l'unico termine non lineare era costituito dalla moltiplicazione fra due variabili. E ancor più esplicitamente questo fu mostrato in un celebre articolo di Lord Robert May [1976], un fisico e zoologo che studia modelli matematici per l'ecologia, nel quale veniva illustrato l'insorgere di dinamiche caotiche attraverso l'applicazione ripetuta (o iterazione) di una funzione di secondo grado, una semplice parabola. La pubblicazione di questo articolo rappresenta un passo decisivo verso la diffusione del concetto di caos deterministico in settori sempre più ampi della ricerca scientifica e della cultura. L'articolo di May termina con il seguente appello:

"Io vorrei sollecitare che sia presentata presto nell'educazione matematica. Questa equazione può essere presentata da un punto di vista fenomenologico iterandola con una calcolatrice, o persino a mano. Il suo studio non richiede più sofisticazione di quanto non richieda un corso elementare di matematica. Tale studio potrebbe in generale arricchire l'intuito di uno studente circa i sistemi non lineari. Non solo nella ricerca, ma anche nella vita politica ed economica di ogni giorno, noi saremmo più ricchi se un numero maggiore di persone si rendesse conto che semplici sistemi non lineari non possiedono necessariamente semplici proprietà dinamiche."

Quindi, se è vero che non stupisce il fatto che nei sistemi caratterizzati da tante variabili in gioco che interagiscono in modo complesso la modifica di un piccolo dettaglio può avere conseguenze notevoli e spesso imprevedibili, al contrario il fatto che questo possa accadere nell'applicazione di un modello matematico con una sola variabile, e in cui l'operazione più complicata da effettuare è un elevamento alla seconda potenza, desta stupore e suggerisce molte riflessioni, fino a far parlare di nuovi scenari nella ricerca scientifica e di nuovi punti di vista nelle relazioni fra determinismo e prevedibilità. (si vedano ad esempio Gleick, 1987, Stewart, 2002). Questo ha anche alimentato una vasta letteratura divulgativa che ha contribuito a diffondere i concetti di base e le applicazioni legate al caos deterministico non solo fra i vari settori della comunità scientifica ma, in maniera più o meno pertinente, anche in settori esterni alla letteratura scientifica, dai romanzi alla pittura, dal cinema ai salotti culturali[3].

Comunque, al di là degli aspetti più coreografici o folkloristici, rimane il fatto che la scoperta del caos deterministico nell'ambito della teoria matematica dei sistemi dinamici (settore tradizionale e ben consolidato della matematica, nato con gli studi di Newton e applicato a settori classici della fisica matematica, dalla meccanica all'astronomia e la fluidodinamica) ha effettivamente fornito nuovi punti di vista e un modo sostanzialmente diverso di intendere l'approccio matematico alla descrizione dei sistemi reali che evolvono nel tempo. Infatti, la descrizione di un fenomeno reale mediante una legge matematica di tipo deterministico, che in molti casi viene interpretato come una opportunità di prevedere e controllare i sistemi che vengono modellizzati, in seguito alla scoperta del caos determini-

[3] A volte, sia nel cinema che nei quotidiani e riviste non specialistiche, si identifica il concetto matematico di caos deterministico con l'abituale significato, nel linguaggio comune, della parola caos, sinonimo di confusione, disordine.

stico non fornisce più simili garanzie. Questo crea un divario fra determinismo e prevedibilità che desta interesse anche da un punto di vista filosofico.

Prima di discutere queste implicazioni occorre tuttavia definire cosa si intende per modello dinamico non lineare. Tale nozione, infatti, risulterà fondamentale per capire come si possa generare il caos deterministico. Inoltre, si getteranno così le basi terminologiche della teoria dei sistemi dinamici, facendo in particolare riferimento alla sua trattazione più moderna, nota come *qualitativa* (o *topologica*), caratterizzata da termini come stabilità, biforcazioni, attrattori, caos (si rimanda ai testi di Alligood *et al.*, 1997, Peitgen *et al.*, 1992, Bischi *et al.*, 2004 per una trattazione più completa, sebbene non a livelli troppo specialistici). Questo è quanto verrà fatto nel prossimo paragrafo, mentre nel paragrafo 3 verranno analizzate alcune implicazioni filosofiche, che coinvolgono anche la sfera psicologica e sociale.

2. BREVE INTRODUZIONE OPERATIVA AI SISTEMI DINAMICI.

2.1 Definizione di sistema dinamico e legge locale di evoluzione.

Un sistema dinamico viene identificato mediante un certo numero di grandezze *misurabili*, dette *variabili di stato*, ciascuna delle quali è una funzione della variabile t, che rappresenta il tempo. Esse possono essere raccolte in un vettore a n componenti $\mathbf{x}(t) = [(x_1(\text{t}), x_2(\text{t}), \ldots, x_\text{n}(\text{t})]$, punto geometrico in uno spazio a n dimensioni, detto spazio degli stati, che in ogni istante t si assume rappresenti il sistema. Assegnato il vettore di stato $\mathbf{x}_0$ ad un istante iniziale t_0, l'evoluzione del sistema dinamico è rappresentata da un operatore $\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}\,(t_0, \mathbf{x}_0; t)$ che permette di determinare lo stato del sistema ad ogni istante di tempo successivo, ovvero la *traiettoria* del sistema. La variabile tempo può essere pensata come un numero reale, e allora diremo che il tempo varia in modo continuo, oppure come un numero naturale, e allora diremo che il tempo varia in modo discreto, cioè assumendo valori multipli di una data unità di misura.

Nel caso di tempo continuo vengono definite delle equazioni locali di evoluzione, o equazioni del moto, mediante *equazioni differenziali* che descrivono come la rapidità di variazione di ciascuna variabile di stato (espressa dalla derivata prima rispetto al tempo) dipende da se stessa e dalle altre variabili:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i\left(x_1, x_2, ..., x_n; \alpha\right) \qquad i = 1, ..., n,, \quad \text{con } x_i(0) \text{ assegnati.}$$

dove f_i è la funzione che determina l'evoluzione della i^{ma} variabile di stato, α rappresenta l'insieme dei parametri da cui dipende la legge del moto. In pratica, dalla conoscenza delle variabili di stato e dei loro tassi di variazione (o velocità) in un istante di tempo, si può calcolare lo stato a un istante successivo e così via.

Invece nel caso di tempo discreto la legge locale di evoluzione, o legge del moto, che "trasforma" lo stato del sistema al tempo t nello stato al tempo successivo $t+1$, viene rappresentata sotto forma di *equazioni alle differenze*:

$$x_i(t+1) = f_i\,(\,x(t), \alpha\,),\ i=1,...,n, \quad \text{con } x_i(0) \text{ assegnati.}$$

Il fatto che il tempo possa essere considerato una variabile discreta può sembrare strano, eppure costituisce una buona rappresentazione del fatto che in certi contesti, ad esempio in economia o nelle scienze sociali, il tempo viene *scandito da eventi*, in genere decisioni che non possono essere rivedute in ogni istante: l'impresa che assume operai o l'agricoltore che semina una determinata quantità di grano non possono modificare la propria decisione in ogni momento, in quanto l'azienda dovrà attendere il successivo consiglio d'amministrazione e l'agricoltore la successiva stagione di semina. Considerazioni analoghe valgono per le stagioni riproduttive di certe popolazioni animali.

Risolvere analiticamente, o in forma chiusa, un sistema dinamico, significa dedurre l'operatore Φ dalle equazioni locali di evoluzione. Anche se esistono teoremi che, sotto ipotesi abbastanza generali, garantiscono esistenza e unicità di tali soluzioni data una qualsiasi condizione iniziale, in genere questo operatore non si riesce a esprimere in termini di funzioni elementari, e quindi la sua espressione non è generalmente nota. Un'alternativa, indicata da Poincaré e poi sviluppatasi nell'ambito della moderna teoria qualitativa o topologica dei sistemi dinamici, consiste nel cercare di capire quali sono le principali proprietà delle soluzioni, e in particolare gli andamenti asintotici (cioè nel limite per tempi lunghi, idealmente infiniti) pur rinunciando a una loro espressione esplicita, analitica dell'operatore Φ.

Per ragioni di semplicità restringiamo ora la nostra analisi al caso di un sistema dinamico a tempo discreto e con una sola variabile di stato. Ogni studente di scuola media superiore incontra, nel corso dei propri studi di matematica, il concetto di funzione reale di variabile reale: dato un numero x (variabile indipendente) preso da un certo dominio, l'applicazione di una funzione produce come risultato un unico numero, $y = f(x)$, detto immagine di x mediante f. Se al risultato così ottenuto si applica di nuovo la stessa funzione (ammesso che ciò sia possibile, ovvero se y appartiene al dominio della funzione) si ottiene un terzo numero $z=f(y)=f(f(x))$. Se anche z sta nel dominio di f nessuno ci impedisce di calcolare $f(z)$ e così via. Si viene così a generare una successione di valori: partendo dalla condizione iniziale x_0, ogni valore successivo si ottiene in modo univoco (quindi perfettamente deterministico) dal valore precedente secondo lo schema *induttivo* (o iterativo) $x(n+1) = f(x(n))$. Si tratta quindi di una "catena" che consiste nell'applicazione ripetuta della funzione, prendendo ogni volta come "ingresso" il valore "uscito" dall'applicazione precedente.

2.2 Sistemi dinamici lineari

Il caso più semplice consiste nell'iterare una funzione lineare, $f(x)= ax$, dove a è una costante. Questo significa che ad ogni iterazione si moltiplica per il numero fisso a il risultato dell'iterazione precedente. Ad esempio se $a = 2$, partendo da un certo valore iniziale x_0 alla prima iterazione otteniamo il doppio di x_0 , cioè $2x_0$, alla seconda il doppio precedente, e quindi il quadruplo di x_0, e così via fino a che, a forza di raddoppiare, otterremo valori arbitrariamente grandi. Se invece fosse $a=1/2$, ad ogni iterazione il valore iniziale x_0 verrebbe dimezzato, quindi dopo due iterazioni diventa 1/4, poi 1/8 e così via fino ad avvicinarsi sempre più al valore 0. È lo stesso processo che si ottiene se in una fotocopiatrice che riduce l'immagine del 50% facciamo la fotocopia di un testo, poi inseriamo nuovamente il testo ridotto ottenendone una ulteriore riduzione e così via, fino a ottenere un puntino di dimensioni arbitrariamente piccole.

Generalizzando, per ogni valore della costante a è facile calcolare i numeri che si susseguono conoscendo solo il valore iniziale x_0: $x(1) = a\, x_0$; $x(2) = a\, x(1) = a(ax_0)= x_0\, a^2$; … $x(n) = x_0\, a^n$. Si tratta di una successione con andamento esponenziale, detta anche progressione geometrica di ragione a. Si riesce quindi a calcolare direttamente l'elemento ennesimo della successione solo conoscendo il valore di partenza, e si può anche dedurre l'andamento asintotico (o di lungo periodo) per $n \to \infty$: se $-1 < a < 1$ allora $x(n)$ converge a 0, se $a > 1$ oppure $a < -1$ allora $x(n)$ diverge. Inoltre, se $a < 0$ l'andamento è di tipo oscillatorio, essendo in tal caso a^n positivo per n pari e negativo per n dispari.

Diciamo che $x=0$ è l'unico *punto di equilibrio*, che risulta essere *attrattivo* se $-1 < a < 1$, *repulsivo* se $a < -1$ oppure $a > 1$. Se, come nel caso della funzione lineare $f(x) = ax$, si riesce a esprimere direttamente lo stato $x(n)$ a partire dalla condizione iniziale x_0, allora si dice che il modello dinamico è stato risolto in modo esplicito (o analitico). Questo è ciò che accade, ad esempio, nel calcolo degli interessi in banca. Se oggi una somma di x_0 euro viene depositata in banca a un tasso di interesse fisso del 3%, tra un anno avremo, oltre al capitale iniziale x_0, anche gli interessi maturati, cioè $x(1)=x_0+r\ x_0=(1+r)x_0$, dove r=3/100=0.03 è il tasso di interesse. Dopo due anni avremo $x(2)=x(1)+rx(1)=(1+r)^2x_0$, e così via. In altre parole, la legge di evoluzione del conto in banca (ammesso che non ci siano cambi nel tasso di interesse e non ci siano versamenti o prelievi) è $x(n)=(1+r)x(n-1)$, una tipica legge lineare, la cui soluzione è la progressione geometrica $x(n)=(1+r)^n x_0$. Quindi un impiegato di banca non avrebbe alcuna difficoltà a fornire una risposta al cliente che gli chiedesse: se oggi deposito 1000 euro al 3% quanto avrò fra 10 anni?

Nel caso particolare $a=-1$ si ottiene un andamento oscillatorio fra i valori x_0 (per n pari) e $-x_0$ (per n dispari) e si dice che la successione ha un andamento ciclico di periodo 2 (perchè ogni due iterazioni si ottiene il medesimo valore).

Per qualunque valore del parametro a è facile generare questa successione, ad esempio con una calcolatrice tascabile, partendo da un dato valore iniziale e moltiplicando per il fattore a quante volte si vuole.

2.3 Modelli non lineari con andamenti regolari.

Premendo ripetutamente un tasto della calcolatrice si possono facilmente iterare altre funzioni, ad esempio la funzione $f(x) = \sqrt{x}$: partendo da x_0= 3 si ottiene $x(1)=\sqrt{3} \cong 1.732$ e poi $x(2)=\sqrt{x(1)} \cong 1.316$ e quindi valori decrescenti che si avvicinano sempre più al valore limite 1; partendo invece da $x_0 = 0.5$ si ottiene $x(1)=\sqrt{0.5} \cong 0.707$ e poi valori crescenti che si avvicinano a 1. È ovvio che partendo da x_0= 1 si ottiene una successione perfettamente costante: $x(n)$=1 per ogni n, quindi x=1 è un equilibrio: se da lì si parte, lì si resta, e in questo caso è attrattivo, poiché se la condizione iniziale viene presa nelle vicinanza dell'equilibrio la successione generata si avvicinerà sempre di più ad esso (in altre parole, perturbando leggermente lo stato di un sistema rispetto al punto di equilibrio, esso vi tornerà spontaneamente). Anche $x = 0$ è un punto di equilibrio, ma ogni piccolo spostamento da esso, ottenuto prendendo x_0 piccolo, ad esempio x_0=*0.0001*, genera una successione crescente che si allontana definitivamente, per andare a convergere all'altro equilibrio, $x = 1$, quindi $x=0$ è un equilibrio repulsivo.

Attraverso questi semplici esempi siamo probabilmente in grado di apprezzare la seguente affermazione di Pierre Simon de Laplace [1776], diventata il manifesto del determinismo, come discuteremo più ampiamente nel paragrafo 3.

«Lo stato attuale del sistema della natura consegue evidentemente da quello che era all'istante precedente e se noi immaginassimo un'intelligenza che a un istante dato comprendesse tutte le relazioni fra le entità di questo universo, essa potrebbe conoscere le rispettive posizioni, i moti e le disposizioni generali di tutte quelle entità in qualunque istante del futuro».

Ovviamente Laplace sapeva che la conoscenza delle diverse entità (quelle che ora chiamiamo variabili di stato) ad un certo istante non può essere ottenuta con infinita precisione, essendo il frutto di processi di misura. Tuttavia, come spesso si assume in base a regole di buon senso, Laplace considerava ovvio il fatto che una piccola incertezza nei valori delle condizioni iniziali avesse altrettanto piccole conseguenze nell'evoluzione del sistema, e quindi il calcolo dello stato futuro risultasse di poco alterato.

2.4 Modelli non lineari con comportamento "caotico"

Seguendo il suggerimento di May [1976], consideriamo il modello dinamico ottenuto iterando la seguente funzione di secondo grado (quindi non lineare) nota come "mappa logistica"

$z(t+1)=f(z(t)) = \mu\ z(t)\ (1-z(t))$

dove z è la variabile dinamica e μ un parametro.

Si tratta di una famiglia di parabole che, per $\mu > 0$, hanno la concavità rivolta verso il basso, con il massimo in $z=1/2$, dove $f(1/2) = \mu/4$. E' un tipico esempio di funzioni *unimodali* caratterizzate dal fatto di essere dapprima crescenti e poi decrescenti, adatte in generale a rappresentare un processo che tende a favorire la crescita di una variabile quando questa è caratterizzata da piccoli valori, e a inibirne la crescita quando invece il valore della variabile diventa grande. Scrivere l'espressione analitica che, da x_0, permette di calcolare direttamente $x(t)$ con t qualsiasi, risulta praticamente impossibile. Infatti, iterando una funzione f di secondo grado partendo da una condizione iniziale x_0, si ottiene: $x(1) = f(x_0)$; $x(2) = f(x(1)) = f(f(x_0)) = f^2(x_0)$ che è un polinomio di 4° grado in x_0; … , $x(10) = f^{10}(x_0)$, un polinomio di grado 1024 in x_0, e così via.

Si ricorre allora a metodi qualitativi. A tale scopo, notiamo innanzi tutto che le soluzioni dell'equazione $f(z) = z$, rappresentate geometricamente dalle intersezioni del grafico della funzione $y=f(z)$ con la bisettrice $y=z$, sono gli equilibri $q^* = 0$ e $p^* = (1 - 1/\mu)$, caratterizzati dalla proprietà $z(t+1) = z(t)$, per ogni t. L'impossibilità di ottenere una soluzione analitica componendo la funzione f con se stessa ci suggerisce di ricorrere a una costruzione grafica per studiare le traiettorie. Consideriamo il grafico della funzione $y = f(z)$, e sovrapponiamolo a quello della bisettrice y = z. Partendo dalla condizione iniziale z(0), presa sull'asse delle ascisse, tracciamo un segmento verticale fino a incontrare il grafico della funzione, e poi procediamo in orizzontale fino all'asse y per ottenere z(1) = f(z(0)). Per procedere nell'iterazione occorre ora riportare *z(1)* sull'asse delle ascisse, in quanto dovrà diventare il nuovo argomento su cui applicare la funzione per ottenere z(2). Questo può essere ottenuto sfruttando la presenza della bisettrice, che essendo il luogo di equazione $y = z$ permette di riportare z(1) sull'asse orizzontale mediante uno spostamento orizzontale verso destra e uno verticale verso il basso usando la bisettrice come punto di svolta (si veda fig. 1). Ora siamo pronti a ripetere lo stesso procedimento per ottenere $z(2) = f(z(1))$ e così via. La sequenza di passi da un iterato al successivo diventa: $z(t)$ (sulla bisettrice) → tratto verticale → grafico della funzione → tratto orizzontale → $z(t+1)$ (sulla bisettrice), come visualizzato in fig. 1.

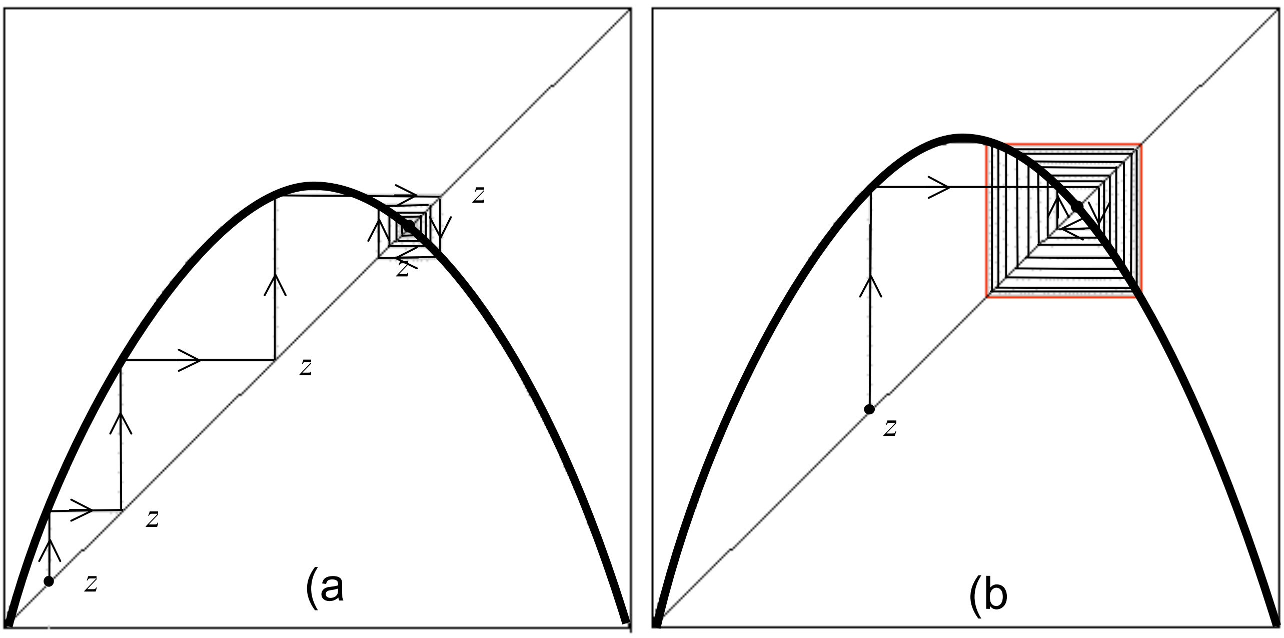

Fig. 1: (a) traiettoria ottenuta per $\mu = 2.7$ (b) traiettoria ottenuta per $\mu = 3.2$

Dalla fig.1a, ottenuta con parametro $\mu = 2.7$, ci rendiamo conto che i due equilibri si comportano diversamente: infatti, le traiettorie si allontanano da q^* e si avvicinano asintoticamente a p^*, mostrando quindi che q^* è un equilibrio instabile (o repulsivo) e p^* è asintoticamente stabile (o attrattivo).

Le cose però cambiano al crescere del parametro in quanto per $\mu > 3$ anche p^* diventa instabile. In generale, si dice che un parametro attraversa un valore di biforcazione quando determina il passaggio fra due situazioni dinamiche *qualitativamente* diverse, dovuto ad esempio alla creazione o scomparsa di attrattori.

Nell'esempio proposto, per $\mu > 3$ l'equilibrio diventa instabile mentre si crea, intorno ad esso, un ciclo stabile di periodo 2. Questo tipo di biforcazione si chiama *biforcazione con raddoppio del periodo*. Aumentando ulteriormente il parametro anche il ciclo di periodo due diventa instabile a causa di una nuova biforcazione di raddoppio periodo che crea un ciclo-4 stabile, il quale diventa l'attrattore "di turno", e aumentandolo ancora il ciclo 4 diventerà instabile lasciando il posto a un ciclo-8 stabile, così via. E' naturale chiedersi cosa avverrà nel seguito: se si raggiungerà un ciclo di periodo massimo dopo il quale le biforcazioni di raddoppio periodo finiranno, o se i raddoppi continueranno all'infinito. Per analizzare ciò si ricorre alla costruzione di un *diagramma di biforcazione*: si considera un piano cartesiano in cui si riportano sull'asse orizzontale i valori del parametro *a* preso in un certo intervallo, ad esempio $\mu \in [1,4]$ nella figura 2, e per ogni valore del parametro si calcolano i primi N punti della traiettoria, dove N è un numero sufficientemente grande (ad esempio $N = 500$). Sulla verticale passante per il valore di r utilizzato si riportano i valori “asintotici” della z, cioè i valori più avanzati fra quelli calcolati, ad esempio i valori $\{z_{201}, ..., z_{500}\}$. Infatti, una volta eliminato il *transitorio* $\{z(0), ..., z(200)\}$ i valori rappresentati si troveranno sull'attrattore "di turno", quindi la loro posizione può essere considerata come una rappresentazione dell’attrattore per il valore del parametro considerato. In fig. 2, seguendo il diagramma di biforcazione, possiamo osservare che, al crescere di μ, si hanno successivi raddoppi di periodo e a un certo punto compaiono delle traiettorie che non sono periodiche, cioè costituite da valori che non coincidono mai con un valore già ottenuto, evidenziate dal fatto che cominciano a comparire, lungo la verticale, delle zone nere perché densamente riempite di punti.

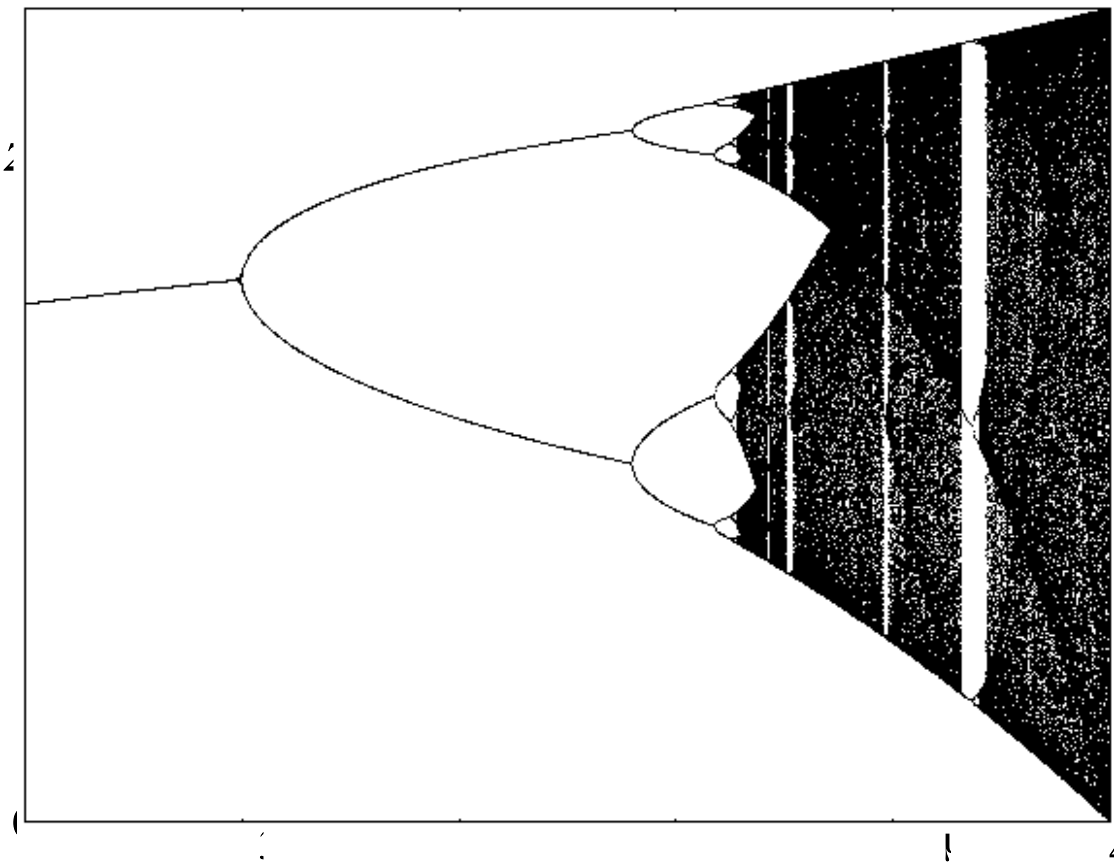

Fig. 2. Diagramma di biforcazione

Se prendiamo una di tali traiettorie e la rappresentiamo lungo l'asse dei tempi otteniamo sequenze di punti come quelle mostrate in Fig. 3 ottenute per $\mu = 3.6$. Da questi andamenti si intuisce l'origine del termine "caos deterministico": sebbene i valori delle $z(t)$ siano ottenuti attraverso l'applicazione ripetuta della funzione f, cioè un meccanismo puramente deterministico, questi sembrano susseguirsi in modo "apparentemente casuale", senza alcuna regolarità o ricorrenza.

Essendo le traiettorie limitate, e non convergendo ad alcun ciclo attrattivo, esse "rimbalzano" continuamente, respinte dai punti periodici repulsivi che sono sparsi (e densi) all'interno dell'intervallo. È facile verificare numericamente la sensitività rispetto alle condizioni iniziali, come mostrato nella Fig. 3 in basso, dove la traiettoria è stata ottenuta partendo da una condizione iniziale che differisce solo di un milionesimo, ovvero 0.000001, rispetto a quella rappresentata in alto. Come si può vedere, dopo le prime iterazioni, in cui si ottengono valori simili, le due traiettorie cominciano a differenziarsi sempre di più, fino a diventare completamente diverse.

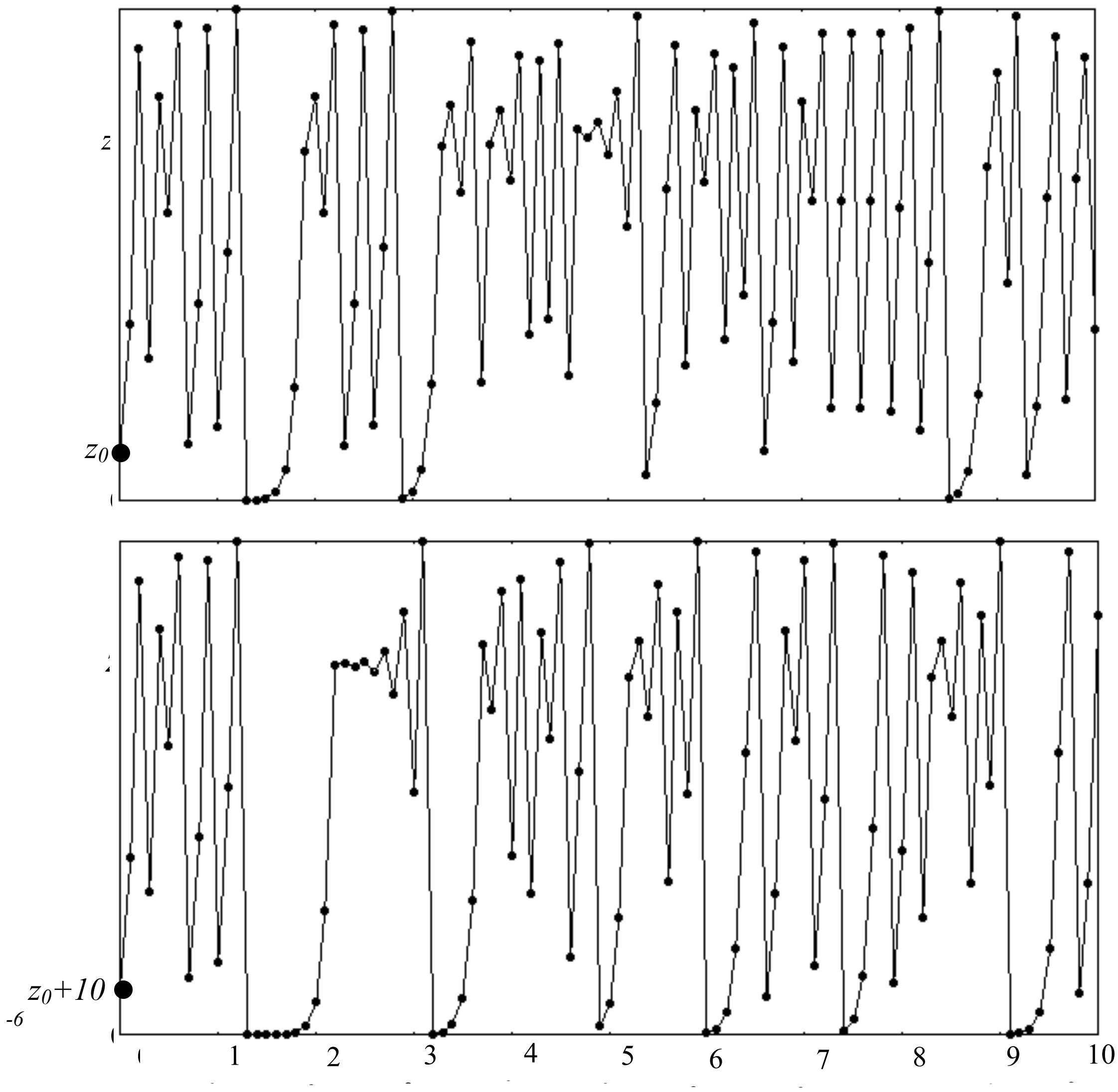

Fig. 3. Due traiettorie caotiche che iniziano da condizioni iniziali che differiscono di 10^{-6}.

Riprendendo l'esempio del calcolo degli interessi, proposto nel paragrafo 2.1, supponiamo che venga proposto un nuovo modo di tassare i capitali, applicando una ritenuta proporzionale al quadrato del capitale, cioè $x(n+1) = (1+r)x(n) - bx(n)^2$. Si noti che partendo dalla mappa logistica $z(t+1)= \mu \; z(t) \; (1- z(t))$, con il semplice cambio di variabile $z=(b/\mu)x$, e identificando il parametro μ con $(1+r)$, si ottiene proprio la mappa $x(t+1) = (1+r)x(t) - bx(t)^2$. Si dice che le due mappe sono coniugate, ovvero hanno le stesse proprietà che si identificano utilizzando le trasformazioni indicate. Quindi, dato un valore di *b*, se facciamo crescere il parametro *r* (anche oltre i normali valori ammessi per i tassi di interesse) possono succedere le cose più strane: i valori anno per anno della cifra in banca possono mostrare alti e bassi con andamento periodico o anche aperiodico (cioè oscillazioni sempre diverse) con forte sensitività rispetto alle condizioni iniziali. Questo significa che se due clienti della banca depositano cifre che differiscono di quantità trascurabili, ad esempio un centesimo su un milione, potrebbero ritrovarsi con capitali in banca completamente diversi dopo un certo numero di anni. In altre parole, osservando un certo valore *x(n)* della successione, chi conosce l'espressione della funzione iterata sa bene come ottenere il valore successivo, ma chi non sa il procedimento utilizzato per ottenere quella sequenza di valori potrebbe considerare impossibile "indovinare" il valore successivo, e potrebbe erroneamente supporre che la banca utilizzi eventi stocastici, come il lancio di un dado, per decidere il calcolo degli interessi.

Questo esempio può aiutarci a capire l'opinione espressa da Poincaré [1908], che è probabilmente la prima chiara distinzione fra caso e caos deterministico:

«Una causa minima, che ci sfugge, determina un effetto considerevole, del quale non possiamo non accorgerci: diciamo allora che questo effetto è dovuto al caso. Se conoscessimo esattamente le leggi della natura e la situazione dell'universo all'istante iniziale, potremmo prevedere esattamente la situazione dello stesso universo in un instante successivo. Ma se pure accadesse che le leggi naturali non avessero più alcun segreto per noi, anche in tal caso potremmo conoscere la situazione iniziale solo approssimativamente. Se questo ci permettesse di prevedere la situazione successiva con la stessa approssimazione, non ci occorrerebbe di più e dovremmo dire che il fenomeno è stato previsto. Ma non è

sempre così; può accadere che piccole differenze nelle condizioni iniziali ne producano di grandissime nei fenomeni finali. Un piccolo errore nelle prime produce un errore enorme nei secondi. La previsione diviene impossibile ...».

Quindi la capacità di effettuare previsioni mediante modelli dinamici non lineari in regime caotico è piuttosto limitata a causa di quella che è stata poi chiamata *sensitività rispetto alle condizioni iniziali*, o anche *effetto farfalla* dopo la metafora di Lorenz [1972]. Anche partendo da identiche condizioni iniziali risulta impossibile, nella pratica, ottenere due sequenze identiche, in quanto piccole differenze possono anche essere introdotte a causa della precisione limitata con cui vengono rappresentati i numeri o per l'inevitabile limitatezza nella precisione delle misure (non solo per questioni pratiche, ma anche per motivi fondamentali, si pensi al *principio di indeterminazione* in fisica quantistica [4]). Però alcune interessanti informazioni globali sul comportamento di lungo periodo dei sistemi in regime caotico possono essere ottenute analizzando le traiettorie nello spazio degli stati, ovvero le proprietà geometriche emergenti nel lungo periodo. In altre parole, i punti di una traiettoria, che per brevi intervalli temporali sembrano muoversi in modo erratico, nel lungo periodo non si sparpagliano in modo casuale nello spazio degli stati ma vanno a disporsi su "nuvole" di punti che assumono determinate strutture geometriche "emergenti",

Questo è proprio ciò che notò Edward Lorenz, verso la fine degli anni '50, mentre stava studiando modelli dinamici utilizzati per le previsioni del tempo. Una volta constatata la sensitività rispetto alle condizioni iniziali, egli si accorse che rappresentando le traiettorie

[4] Nella fisica quantistica il principio di indeterminazione di Heisenberg stabilisce che non è possibile conoscere simultaneamente la velocità e la posizione di una particella con certezza, e quantifica esattamente il prodotto delle due incertezze. Il principio si applica anche ad altre coppie di variabili coniugate, come energia e tempo. Ci sono varie interpretazioni di questo principio, come quella detta "di Copenaghen" legata alla particolare natura delle particelle della fisica quantistica, dislocate nello spazio in accordo a funzioni di probabilità regolate da equazioni d'onda. È questa interpretazione che portò Einstein a dire: "Non credo che Dio giochi a dadi con l'universo".

nello spazio tridimensionale delle variabili di stato queste andavano a disporsi su una particolare figura che non mutava cambiando le condizioni iniziali. Si trattava di un *attrattore caotico,* che venne poi chiamato *"attrattore strano di Lorenz*" (fig. 4). La sua forma ci dà informazioni utili perché ci dice che, per quanto bizzarre, le traiettorie rimarranno intrappolate all'interno di quella figura. Inoltre la forma e l'estensione dell'attrattore dipendono dai parametri, e da questo si possono dedurre, ad esempio, informazioni sull'ampiezza delle oscillazioni climatiche, pur non permettendo di fare previsioni a lungo termine circa le condizioni meteorologiche.

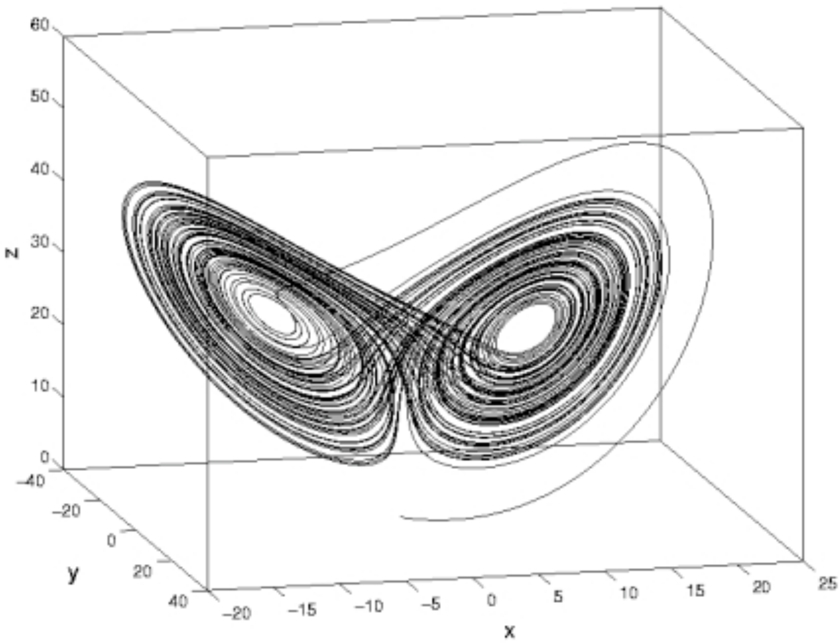

Fig. 4 Attrattore di Lorenz.

Anche negli andamenti caotici generati dalla parabola logistica di May si può notare che anche in presenza di dinamiche caotiche talvolta le traiettorie si accumulano in particolari sottointervalli. Può essere un unico intervallo, o più intervalli disgiunti che vengono percorsi ciclicamente, come avviene per i due intervalli caotici ciclici di fig. 5 (ottenuti per μ =3.61, si veda anche il diagramma di fig. 2). La presenza di tali intervalli è legata all'esistenza vertice della parabola, in quanto sono delimitati proprio da quel punto e dalle sue immagini mediante la funzione (si veda ad esempio Bischi *et al.*, 2004).

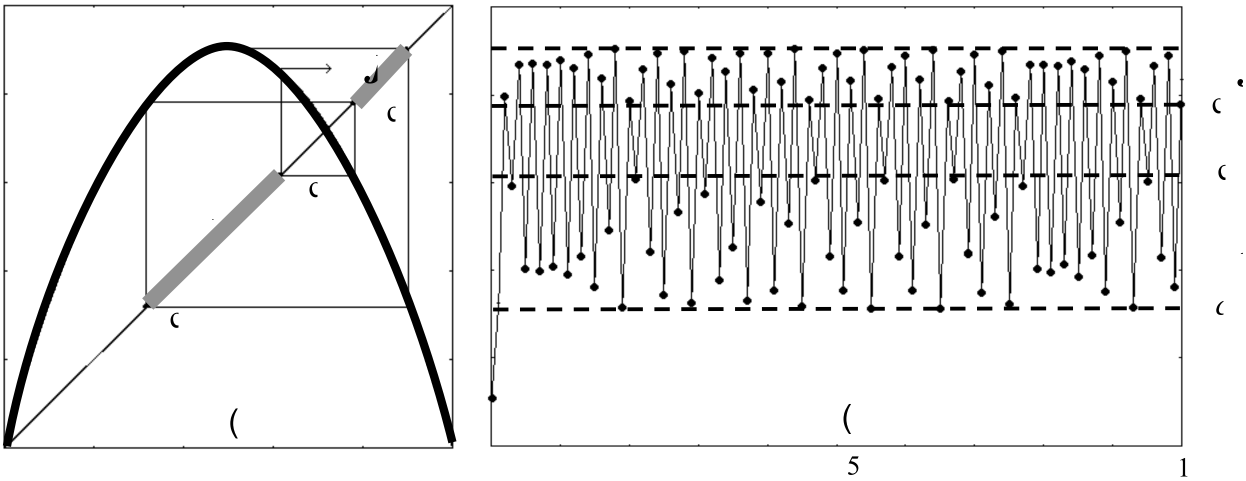

Fig. 5 Attrattore caotico a due pezzi (a) sulla parabola (b) come serie temporale.

2.5 Stretching & Folding, la geometria del caos.

Concludiamo questa parte di carattere matematico fornendo qualche indicazione sulle proprietà geometriche che stanno alla base del fenomeno del caos deterministico.

Una funzione lineare $f(x) = ax$ può essere anche esaminata come una trasformazione che muta segmenti in altri segmenti, producendo contrazioni, o allungamenti. Consideriamo ad esempio un segmento AB rappresentato sull'asse delle ascisse dalla porzione di estremi x_A e x_B. La sua lunghezza è data da AB = $(x_B - x_A)$. Applicando la trasformazione lineare a tutti i punti di AB si ottiene un segmento di estremi $x'_A = ax_A$ e $x_B' = ax_B$ di lunghezza A'B' = $(x_B' - x_A') = a(x_B - x_A)$. Questo significa che il segmento risulta allungato (o dilatato) se $a>1$, accorciato (o contratto) se $0<a<1$, e la trasformazione viene chiamata, rispettivamente, *dilatazione* e *contrazione*. Se $a<0$ allora il segmento viene anche ribaltato, ossia l'immagine di x_B precede l'immagine di x_A, e il segmento trasformato risulta essere *B'A'*. Quindi per $-1 < a < 0$ la trasformazione lineare provoca un *ribaltamento e contrazione* del segmento, per $a < -1$ si ha un *ribaltamento con dilatazione*.

Possiamo dedurre che l'applicazione ripetuta di una mappa lineare contrattiva porta alla successiva riduzione di un segmento fino a farlo collassare in un punto, mentre l'iterazione di una dilatazione lineare allunga sempre più il segmento facendolo crescere a dismisura

Se invece consideriamo un'applicazione non lineare, come la parabola $y = \mu\, x(1- x)$, questa agisce su un segmento allungandolo in certe zone e comprimendolo in altre, e se il segmento considerato include il vertice lo ripiega anche. Due punti in posizione simmetrica rispetto al vertice della parabola, ad esempio x_A=1/3 e x_B=2/3, vengono trasformati nello stesso punto, essendo $f(1/3)=f(2/3)=2/9\mu$. Questo può essere espresso dicendo che il segmento AB=[1/3,2/3] viene ripiegato dalla funzione portando a coincidere i suoi estremi. Alla seconda iterazione tali azioni vengono di nuovo applicate e così via.

Avviene quindi che l'applicazione ripetuta della funzione di secondo grado su un segmento può essere vista come l'applicazione successiva di azioni di stiramento, piegamento, compressione. L'effetto combinato di queste azioni è possibile solo con funzioni non lineari, in quanto, come abbiamo fatto notare sopra, una funzione lineare o dilata o contrae (ma non entrambe le cose contemporaneamente) e non può certo causare piegamenti.

Ebbene, l'essenza del caos risiede proprio nell'applicazione combinata e ripetuta di queste azioni, in particolare a quelle che provocano stiramenti e ripiegamenti (*stretching & folding*). Spesso viene usata la metafora dell'azione geometrica che il pizzaiolo si esercita sull'impasto. La conseguenza di questo procedimento, ripetuto nel tempo, è che punti inizialmente vicini si allontanano e poi si riavvicinano in modo imprevedibile, fino a rimescolare uniformemente il tutto, pur rimanendo all'interno dell'insieme compatto costituito dall'impasto. Una trattazione rigorosa di queste proprietà geometrica è stata fornita da Smale [1967].

3. ALCUNE IMPLICAZIONI TEORICHE E PRATICHE DEL CAOS DETERMINISTICO

La possibilità di descrivere le leggi della natura, e l'evoluzione di sistemi reali, mediante formule ed equazioni matematiche ha portato a una sempre maggiore capacità di prevedere e spiegare eventi che sembravano legati a fortuite coincidenze o ai capricci di divinità. Questo ha fatto parlare di "*irragionevole successo della matematica*" (dall'articolo del Nobel per la fisica Eugene Wigner [1967]), successo che era stato profetizzato quasi quattro secoli prima da Galileo nel celebre brano ne "Il Saggiatore" (il grande libro dell'Universo è scritto in lingua matematica ...).

Le equazioni che regolano il moto di un pendolo o di un grave lanciato in aria, o quelle che permettono di descrivere e prevedere eclissi, maree, moti di pianeti e comete e, in certa misura, anche uragani e terremoti, fino alle equazioni che descrivono il moto dei fluidi, o delle correnti elettriche e delle onde elettromagnetiche, è evidente che il confine che separa ciò che è descritto matematicamente da ciò che non lo è ancora si sposta sempre più rapidamente, fino a farci immaginare che tutto ciò che è ancora caratterizzato da scarsa prevedibilità e controllabilità verrà prima o poi assoggettato a leggi matematiche eliminando ogni incertezza.

Questo, in breve, è il cosiddetto "determinismo laplaciano", termine che è giustificato dalla famosa descrizione di Laplace (riportata in parte nel paragrafo 2.3) in cui si immagina l'esistenza di una intelligenza superiore, talvolta denotata come il "demone di Laplace", capace di conoscere lo stato dell'Universo a un certo istante e in possesso delle leggi matematiche che governano tutti i fenomeni che in esso avvengono. Questa descrizione era stata usata da Laplace [1776] nell'introduzione al suo "*Théorie analytique des probabilitiés* " per giustificare lo studio della teoria della probabilità, necessario *pro tempore* per affrontare con strumenti matematici anche quei fenomeni che ancora non erano stati assoggettati a leggi matematiche sufficientemente precise.

Parole quasi identiche erano comunque state usate circa un secolo prima da Leibniz, che scriveva "Vediamo allora che ogni cosa procede in modo matematico - cioè infallibilmente - nel mondo intero, in modo che se qualcuno avesse una sufficiente capacità di conoscere a fondo le cose, e avesse abbastanza intelligenza e memoria per considerare tutte le circostanze e tenerne conto, questi potrebbe essere un profeta e potrebbe vedere il futuro nel presente come in uno specchio".[5]

In altre parole, sulla base dell'unicità delle soluzioni delle equazioni alle differenze o differenziali con assegnate condizioni iniziali, si viene a far coincidere la descrizione mediante equazioni deterministiche dei fenomeni della natura con la prevedibilità, ovvero la completa e univoca calcolabilità, sia degli stati futuri che di quelli passati. Questo sembra eliminare non solo ogni libero arbitrio, ma anche ogni incertezza o imprevisto, ovvero non ci sarebbe più alcuno spazio per dubbi sul futuro dell'Universo (incluso il futuro dell'umanità) né sul suo passato.

Il principio di indeterminazione di Heisenberg del 1926, che sta alla base dell'interpretazione della meccanica quantistica, sembra incrinare questa visione, in quanto impedisce al demone di Laplace di effettuare misure con una precisione infinita. Ma questo non è in re-

[5] Da E. Cassirer. *Determinism and Indeterminism in Modern Physics*. New Haven: Yale University Press, 1956, traduzione mia.

altà un problema cruciale se si ammette che un piccolo errore iniziale possa mantenersi piccolo lungo un'intera soluzione delle equazioni che descrivono l'evoluzione dei sistemi (si vedano le parole di Poincaré riportate nel paragrafo 2.4). Del resto è ben noto che, a prescindere dal principio di indeterminazione, non si può esprimere una misura con infinita precisione, in quanto non esiste la possibilità pratica di rappresentare numeri reali con infinite cifre, neppure usando una macchina di Turing e tanto meno sofisticati computers. Ad esempio, se un dato in ingresso coincidesse con la misura della diagonale di un quadrato di lato uno o di una circonferenza di raggio uno, numeri notoriamente irrazionali, ogni calcolo pratico non potrebbe che utilizzarne una approssimazione di precisione finita. È invece la scoperta del caos deterministico, con la sua capacità di amplificare ogni perturbazione delle condizioni iniziali, anche arbitrariamente piccola, che spezza il legame fra determinismo e prevedibilità.

Diventa persino difficile distinguere a priori ciò che è casuale da ciò che è deterministico. Infatti se, come afferma Poincaré, chiamiamo casuale un processo condizionato da cause piccole, anche impercettibili, di cui non riusciamo a prevedere l'esito, e definiamo come deterministico un processo descritto da equazioni matematiche di cui sappiamo perfettamente calcolare il risultato (da un input un unico output ben determinato) ci accorgiamo che la definizione di caos deterministico presenta entrambe le caratteristiche, manifestando l'una o l'altra a seconda delle circostanze. Un esempio emblematico è costituito dai fluidi che, pur essendo governati da equazioni di evoluzione deterministiche e ben conosciute (le equazioni di Navier-Stokes) possono esibire traiettorie regolari (dette "moto laminare") oppure caotiche (il già citato "moto turbolento") a seconda delle circostanze.

Quindi non c'è necessariamente contrapposizione fra le categorie in apparenza contrapposte dei fenomeni regolati da leggi matematiche e quelli casuali, perché possono essere viste come diverse manifestazioni di una stessa categoria. Inoltre scompare il timore che matematizzando si elimini il libero arbitrio e il fascino dell'imprevisto, in quanto leggi matematiche non lineari lasciano spazio alla sorpresa, all'imprevedibilità legata all'effetto farfalla

In definitiva, il concetto platonico per il quale tutto è manifestazione di regolarità matematica non è quindi estraneo a fluttuazioni erratiche e svolte inaspettate causate da minuscole fluttuazioni. Anche in un mondo regolato da rigide leggi matematiche un piccolo evento, una minuscola azione, può provocare una rivoluzione. Ovviamente questa imprevedibilità e scarsa controllabilità anche nei sistemi governati da leggi matematiche dovrebbe indurre a prudenza nel prendere decisioni, ovvero al cosiddetto “principio di precauzione”. Questo non può che farci riflettere sul l’appello di May riportato nell'introduzione: anche i politici dovrebbero studiare i fenomeni non lineari, e in particolare il caos deterministico, nel prendere le loro decisioni, in quanto piccoli imprevisti, anche lontani nello spazio e nel tempo. possono avere conseguenze notevoli. La globalizzazione ha ovviamente reso ancor più importante questo appello, basti pensare alla recente crisi finanziaria che non era stata prevista e le cui conseguenze sono sfuggite al controllo dei decisori.

Come già evidenziato nel paragrafo 1, la scoperta del caos deterministico ha avuto un forte impatto non solo in molte discipline scientifiche, come in fisica per analizzare la turbolenza nei fluidi, in chimica per descrivere gli andamenti fluttuanti di certe reazioni enzimatiche, in ecologia per descrivere le oscillazioni irregolari osservate in popolazioni di insetti, ma anche nelle scienze sociali e in psicologia. In economia, ad esempio, la scoperta che anche modelli dinamici molto semplici sono in grado di generare caos deterministico, unitamente alla constatazione che modelli di questo genere possono essere facilmente ottenuti con ipotesi del tutto standard di equilibrio economico e competizione perfetta, ha scosso le basi di molte delle idee alle quali si erano abituati gli economisti (si veda Bischi, 2010). Infatti, se si ottengono dinamiche caotiche in un modello economico basato sull'ipotesi dell'agente economico razionale (ovvero capace di prevedere l'evoluzione del sistema economico in cui opera, così come il fisico conosce le equazioni che governano un certo fenomeno), allora emerge un'evidente antinomia. Infatti, anche ipotizzando che gli agenti economici abbiano informazione perfetta, ivi inclusa la conoscenza del modello, essi in realtà non possono in alcun modo raggiungere nelle loro previsioni la precisione infinita richiesta per evitare gli effetti dell'estrema sensitività delle dinamiche caotiche. In altre parole, se si parte da un modello con aspettative razionali e si scopre che esso genera caos deterministico, allora le previsioni non possono essere razionali (cioè perfette).

Comunque, il caos deterministico permette di spiegare l'insorgere delle fluttuazioni persistenti e irregolari, tipiche dei cicli macroeconomici e dei mercati finanziari, attraverso meccanismi puramente endogeni, cioè senza dover ricorrere a shock stocastici esogeni. Questo accade, ad esempio, in sistemi economici caratterizzati da effetti destabilizzanti, come quello noto come moltiplicatore-acceleratore (un tipico feed-back positivo) associati a effetti di tipo auto-correttivo (ovvero feed-back negativi). Questo scenario di espansione locale e contrazione globale è proprio il meccanismo di *stretching e folding* che sta alla base delle dinamiche caotiche.

Inoltre, l'effetto dei parametri sulla creazione, cambiamenti di forma e distruzione degli attrattori può far pensare anche alla "gestione delle fluttuazioni", non nel senso di prevederle o prevenirle cercando di evitare gli shocks esterni, dato che non sono loro i responsabili, ma di capirle e limitarne gli effetti condizionando la forma e la misura degli attrattori. Lo studio degli attrattori caotici costituisce un modo nuovo di intendere il controllo dei sistemi che evolvono nel tempo, non istante per istante o punto per punto ma nel senso di un controllo negli andamenti globali e del lungo periodo.

Un'interessante applicazione di questo concetto è descritta da Pietronero [2007] che dimostra l'inutilità dei continui (talvolta ossessivi) controlli lungo l'iter dei processi burocratici, ovvero quei controlli in cui a ogni passaggio qualcuno deve apporre timbro e firma per attestare che "la pratica è qui ora". Assumendo che tali processi siano governati da leggi non lineari, Pietronero deduce che i controlli puntuali per seguire e controllare le traiettorie delle pratiche non servono, dato che le inevitabili piccole perturbazioni cui tali processi sono sottoposti ne rendono comunque imprevedibile l'esito a causa dell'effetto farfalla. Egli afferma che "*Se vogliamo controllare l'evoluzione di un sistema la cui dinamica è intrinsecamente caotica, è abbastanza inutile cercare di definire le condizioni iniziali e le sue leggi dinamiche in modo estremamente dettagliato, perché in ogni caso sfuggirà inevitabilmente al nostro controllo. Si deve invece introdurre un meccanismo globale (attraverso incentivi e controlli a posteriori) che porti alla creazione di attrattori che spontaneamente conducano i processi verso gli obiettivi desiderati*".

Comunque, se da una parte la presenza del caos deterministico limita la capacità di fare previsioni mediante modelli matematici, dall'altra suggerisce che fenomeni apparentemente complessi e aleatori potrebbero avere una semplice legge deterministica che ne sta alla base, e quindi essere simulati mediante semplici modelli matematici deterministici, purché non lineari.

Per illustrare questo punto faccio ricorso a una frase di Umberto Eco, tratta da "Il pendolo di Foucault" (1988) "*Il mondo si muove in modo apparentemente disordinato mentre c'è un disegno dietro"*. Come a volte accade nelle azioni terroristiche o di guerriglia, che pur sembrando casuali hanno dietro una regia e quindi seguono una ben precisa logica.

Questa sensazione potrebbe comunque alimentare ossessioni paranoiche, arrivando a dire che "nulla è dovuto al caso", ma tutto segue un disegno preordinato, e a ogni evento deve sempre potersi associare un colpevole. In *Psicopatologia della vita quotidiana* Freud caratterizza il paranoico come colui che è ossessionato dall'idea che le persone che lo circondano siano in qualche modo coalizzate per danneggiarlo, e quindi non vede casualità negli eventi, ad essi sottende sempre una sorta di predeterminazione.

C'è anche da dire che le teorie psicanalitiche, che fanno risalire importanti tratti della personalità di un adulto a piccoli traumi dell'infanzia, talvolta in apparenza insignificanti (tanto da essere rimossi, quindi non ricordati) sono molto vicine alla filosofia dell'effetto farfalla di Lorenz.

Da questi brevi cenni, del tutto incompleti, si può dedurre quanto profonda e quanto ramificata sia la penetrazione del concetto di caos deterministico nella ricerca e nella cultura, e come le conseguenze risultino essere fortemente interdisciplinari.

BIBLIOGRAFIA

Alligood, K.T., Sauer, T.D., Yorke, J.A. (1997) "Chaos. An introduction to dynamical systems", Springer-Verlag, New York.

Batterman, R. W. (1993), "Defining Chaos", Philosophy of Science, 60: 43–66.

Bertuglia C.S., Vaio, F. (2003) *Non linearità, caos e complessità*, Bollati Boringhieri, Torino.

Bischi, G.I., R. Carini, L. Gardini, Tenti, P. "Invito a : Sistemi dinamici e caos deterministico» *Lettera Matematica Pristem* (Springer-Italia) n. 47 (2003) pp. 15-26.

Bischi, G.I. "Caos deterministico e previsioni economiche" *Lettera Matematica Pristem*, n.74/75 (2010) pp. 112-118.

Bischi G.I., Carini R., Gardini L., Tenti P. (2004) *Sulle Orme del Caos. Comportamenti complessi in modelli matematici semplici,* Bruno Mondadori Editore, Milano.

Devaney R.L. (1990) *Caos e frattali. Matematica dei sistemi dinamici e applicazioni al calcolatore*, Addison Wesley Longman Italia.

Gadda, C.E. (1953) "L'egoista" in *I viaggi e la morte*, Garzanti, 2001.

Gadda, C.E. (1974) *Meditazione Milanese*, Torino, Einaudi.

Galileo Galilei, Il Saggiatore, Opere VI, p.232.

Earman, J.(2007) "Aspects of determinism in modern physics", Handbook of the Philosophy of Science. Philosophy of Physics, editors: Jeremy Butterfield and John Earman, Elsevier.

Gleick J. (1987) *Chaos. The amazing science of the unpredictable*, Penguin.

(trad. it. *Caos. La nascita di una nuova scienza*, Sansoni, Firenze, 1996)

Guckenheimer, J., Holmes, P. (1983) *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, Berlin.

Judd, K., and Smith, L. (2001), “Indistinguishable States I: Perfect Model Scenario”, Physica D 151: 125–141.

Judd, K., and Smith, L. (2004), “Indistinguishable States II: Imperfect Model Scenarios”, Physica D 196: 224–242.

Kane, R. (1996), The Significance of Free Will, Oxford: Oxford University Press.

Kellert, S. (1993), In the Wake of Chaos, Chicago University Press.

Koperski, J. (1998), “Models, Confirmation and Chaos”, Philosophy of Science, 65: 624–648.

Koperski, J. (2001), “Has Chaos Been Explained?”, British Journal for the Philosophy of Science, 52: 683–700.

Laplace, P. S. (1776) *Théorie analytique des probabilitiés*. Paris: V. Courcier, 1820.

Leiber, T. "On the actual impact of deterministic chaos" *Synthese* 113: 357–379, 1998.

Li T.Y., Yorke J.A. (1975) "Period Three Implies Chaos." *American Mathematical Monthly* 82, 985-92.

Lorenz E.N. (1963) "Deterministic non-periodic flow" *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20, 130-141.

Lorenz, E.N. (1972) “*Does the flap of a butterfly’s wings in Brazil set off a tornado in Texas?”* Articolo presentato al 139° meeting dell' American Association for the Advancement of Science.

May R.M. (1976) "Simple mathematical models with very complicated dynamics" *Nature* 261, 459-467.

Peitgen, H.O., Jürgens, H., Saupe, D. (1992) "Chaos and Fractals. New Frontiers of Science", Springer-Verlag, New York.

Pietronero L. (2007) *Complessità e altre storie*", Di Renzo Editore

Poincaré, H. (1908), *Science et Méthode*, Ed. It. da cui è tratto il passo citato: "Scienza e metodo", Einaudi 1997, pag.56.

Poe, E.A.(1842) "*The mystery of Marie Rogêt",* Ed. It. "I racconti del mistero e del raziocinio, Garzanti, 1989.

Ruelle, D. and F. Takens (1971). "On the nature of turbulence". *Communications of Mathematical Physics* 20: 167–192.

Smale, S. (1967). "Differentiable dynamical systems". *Bulletin of the American Mathematical Society* 73: 747–817.

Smith, P. (1998**),** *Explaining Chaos***,** Cambridge: Cambridge University Press.

Stanford Encyclopedia of Philosophy, "Chaos", http://plato.stanford.edu/entries/chaos/

Stewart, I. (2002) *Does God Play Dice: The New Mathematics of Chaos*, Second Edition, Blackwell Publishers Inc., Malden, MA.

Wigner, E.P.(1967)"The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences", in Symmetries and reflections. Scientific essays of E.P. Wigner, Indiana University Press.