Giornale di Astronomia

Rivista di informazione, cultura e didattica
della Società Astronomica Italiana

Atti del Convegno

Leonardo e la Luna. Alle origini della scienza moderna
Cinquecentenario di Leonardo e cinquantennio dell'allunaggio

Pontificia Università Lateranense, Roma, 20 novembre 2019

A cura di **Flavia Marcacci** e **Sara Taglialagamba**

Fabrizio Serra editore
Pisa · Roma

Dicembre 2020
Vol. 46° · N. 4

Le *lunule* di Leonardo

Gian Italo Bischi · Matteo Bischi
Università di Urbino Carlo Bo

Introduzione

Una *lunula* (o *menisco*) è una figura geometrica piana delimitata da due archi di circonferenza, la cui forma ricorda quella della falce di un quarto di Luna. Leonardo fu particolarmente affascinato da questa e altre figure delimitate da porzioni curvilinee (come settori circolari, segmenti circolari, triangoli curvilinei) tanto che il loro studio diventò una delle passioni più longeve, a giudicare dalle pagine con centinaia di figure composte da porzioni di cerchio intersecate in vario modo, inscritte in poligoni o circoscritte ad essi (si veda ad esempio la Fig. 1, tratta dal *Codice Atlantico*). Lo scopo di questo studio consiste spesso nel risolvere problemi di "quadratura", ovvero nel costruire, con riga e compasso, o tramite scomposizione e ricomposizione di parti, figure diverse ma equiestese, cioè aventi la stessa area. Si tratta, in sostanza, di trasformare figure complicate in altre che hanno la stessa superficie ma per le quali sia immediato determinare l'area. Un problema facile da risolvere per figure poligonali, i cui lati sono segmenti: ad esempio un triangolo è equiesteso a un rettangolo avente la stessa altezza e metà base, un trapezio a un triangolo con la stessa altezza e base uguale alla somma delle due basi parallele, fino a poligoni più complicati che si possono facilmente scomporre in triangoli. Più difficile si presenta la questione per figure piane aventi almeno un lato curvilineo, tanto che uno dei famosi problemi non risolti della geometria greca, presente già negli *Elementi* di Euclide, consiste nel costruire con riga e compasso un rettangolo equiesteso a un cerchio. Un problema che appassionò non poco Leonardo, che se ne occupò a più riprese in un arco temporale di più di 12 anni.[1] In certi momenti pensò di aver finalmente trovato la soluzione, come quando annotò nei suoi appunti «La notte di Sancto Andrea trovai il fine della quadratura del cerchio; e in fine del lume e della notte e della carta dove scrivevo, fu concluso; al fine dell'ora».[2] Poi si rese conto che la sua deduzione era errata.

Ma se è così difficile ottenere la quadratura del cerchio, che speranza poteva avere Leonardo di calcolare l'area delle *lunule*? In realtà esiste un risultato di Ippocrate di Chio (ca. 470-410 a.C.) forse un pitagorico (da non confondere con il famoso medico Ippocrate di Cos) che in un testo intitolato *Elementi* aveva dimostrato l'equiestensione fra una *lunula* delimitata esternamente da una semicirconferenza e il triangolo rettangolo isoscele avente come ipotenusa il diametro della semicirconferenza (si veda Fig. 3) e altri casi simili.[3] Il triangolo è esattamente metà del quadrato avente l'ipotenusa come diagonale, quindi una perfetta quadratura della *lunula*. Secondo Roberto Marcolongo,[4] Leonardo sarebbe venuto a conoscenza di questo risultato da un libro di Giorgio Valla (1447-1500), un famoso umanista suo contemporaneo, il cui nome figura fra gli autori dei libri posseduti da Leonardo che figurano nell'elenco del *Codice Madrid II*, che sembra sia anche stato il primo a usare il termine *lunola*.

Leonardo, in occasione dei suoi continui spostamenti, era solito stilare un elenco dei propri libri, probabilmente per verificare che non andassero perduti durante il viaggio. Questi inventari forniscono importanti informazioni sui testi posseduti, che arrivarono a comprendere circa 200 volumi in occasione dei suoi ultimi viaggi, un numero ragguardevole per quei tempi per un artista.[5] Uno degli autori che Leonardo ha letto con molta attenzione è Leon Battista Alberti (1404-1472), punto di riferimento durante tutto il periodo rinascimentale e che, tra le altre cose, aveva anche scritto un *De lunularum quadratura* oltre al più noto *Ludi matematici*, il quale in più occasioni aveva espresso il sogno di riuscire a risolvere il problema della quadratura del cerchio. Questa è un'altra possibile fonte di ispirazione per la passione di Leonardo, che si inserisce in un più ampio programma di studio delle trasformazioni di figure, sia piane sia solide, che assumono forma diversa ma conservano area o volume rispettivamente. Studi che, nelle intenzioni di Leonardo, avrebbero dovuto essere il punto di partenza per veri e propri trattati, di cui aveva anche annotato i titoli nei suoi tanti fogli di appunti, come quando nel 1505 annuncia in un appunto di voler scrivere il «Libro titolo de strasformazione, cioé

[1] Si vedano ad esempio Augusto Marinoni, *La teoria dei numeri frazionari nei manoscritti vinciani: Leonardo e Luca Pacioli*, in *Raccolta Vinciana*, 20 (1964), pp. 111-196; Augusto Marinoni, *La matematica di Leonardo da Vinci: una nuova immagine dell'artista scienziato*, Milano, Arcadia, 1982.

[2] *Codice Madrid II*, folio 112*r*.

[3] Si veda ad esempio la voce "Hippocrates of Chios" su *Mac Tutor History of Mathematics Archive*, https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hippocrates/ (consultato il 2.9.2020).

[4] R. Marcolongo, "Leonardo da Vinci nella storia della matematica e della meccanica", *Atti Congresso Bologna*, 1 (1929) pp. 275-293.

[5] Riguardo alla biblioteca personale di Leonardo, si veda Carlo Vecce, *La biblioteca perduta. I libri di Leonardo*, Salerno Editrice, 2017.

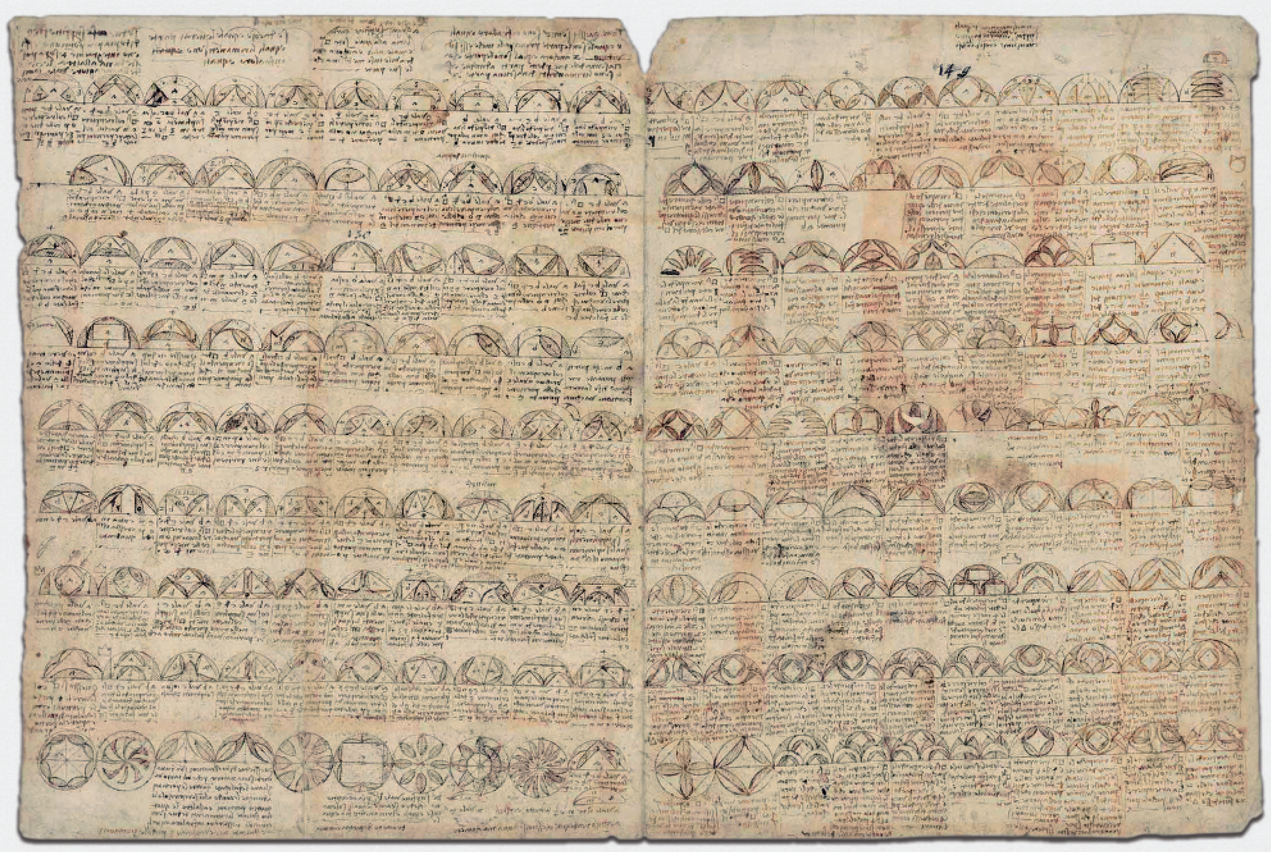

Fig. 1. Leonardo, *Codice Atlantico,* folio 455*r*. (Milano, Veneranda Biblioteca Ambrosiana)

d'un corpo 'n un altro sanza diminuizione di materia»,[6] contenente una visione dinamica della geometria, o il progetto di compendio denominato *De ludo geometrico* ispirato al grande foglio doppio del *Codice Atlantico* (folio 455*r*) mostrato in Fig. 1, in cui compaiono 176 diagrammi con una stupefacente varietà di forme geometriche ottenute sovrapponendo e intersecando in vario modo cerchi, triangoli, quadrati e poligoni vari, formando una grande varietà di mezzelune, rosette e forme stellate curvilinee, talvolta ombreggiate per poter confrontare le estensioni delle parti scure e di quelle chiare.

Il titolo del trattato scelto da Leonardo, *De ludo geometrico*, ci suggerisce che per lui si trattava fondamentalmente di un passatempo, un esercizio per la sua mente straordinariamente dotata della capacità di visualizzare e comporre figure complesse e stravaganti, che poi cercava di elaborare geometricamente con riga e compasso. Libri che, come al solito, Leonardo non arrivò mai a realizzare. Comunque non abbandonò mai lo studio geometrico delle trasformazioni, che lo accompagnò con rinnovata passione fino ai suoi ultimi giorni, tanto che proprio di geometria si occupa nel folio 245*r* del *Codice Arundel*, l'ultimo foglio scritto da Leonardo nel 1518 mentre soggiornava nel Château d'Amboise, nella regione francese della Loira, dove gli appunti che accompagnano gli schizzi di triangoli con inscritti rettangoli equiestesi (Fig. 2) si interrompono bruscamente con la famosa annotazione, scritta con la solita minuta calligrafia specularmente capovolta, «ecc. perché la minestra si fredda».[7]

Nel prossimo paragrafo cerchiamo di delineare il rapporto di Leonardo con la matematica, un rapporto non facile ma nemmeno privo di interesse, soprattutto per i metodi decisamente originali utilizzati nello studio della geometria; quindi passeremo a descrivere lo studio delle figure curvilinee, tra cui le *lunule*, accennando alle tecniche adottate da Leonardo per dimostrare proprietà di equiestensione, mediante delle trasformazioni che ne conservano l'area. L'articolo si chiude con alcune considerazioni sulle tecniche geometriche di Leonardo.

Leonardo e la matematica

Leonardo non fu certo un matematico al modo che oggi intenderemmo, al punto che non utilizzò in modo proficuo e sistematico le tecniche matematiche nei suoi appunti di meccanica e ingegneria. Questo può stupire, dato che spesso si pensa a Leonardo non solo come grande pittore, ma anche ingegnere, scienziato e inventore, tutte attività che richiedono l'utilizzo di metodi matematici. In effetti

[6] *Codice Forster I*, folio 3*r*

[7] Si veda C. Pedretti, *«Eccetera: perché la minestra si fredda»: (Codice Arundel, fol. 245 recto)*, Lettura Vinciana xv (Vinci, Biblioteca Leonardiana, 15 aprile 1975) Firenze, Giunti Barbèra, 1975.

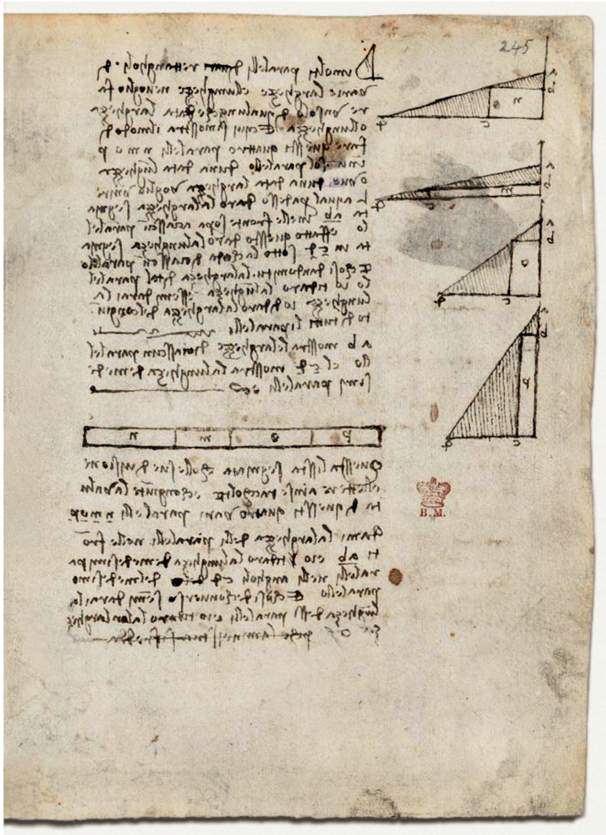

Fig. 2. Leonardo, *Codice Arundel,* folio 245r. (London, British Library)

come inventore di macchine realizzò stupendi schizzi che raramente erano accompagnati da un vero e proprio progetto, con tanto di calcoli sul loro possibile funzionamento. E anche in questi rari casi la matematica utilizzata da Leonardo si limita a poche nozioni di base. I disegni possono dare un'idea più immediata e affascinante a chi li osserva, ma sono difficili da tradurre in realizzazioni. Come scrisse il poeta e ingegnere Leonardo Sinisgalli, con la sua solita prosa incisiva, «quelle di Leonardo da Vinci non erano macchine, erano sculture articolate, erano dispositivi emozionanti».[8]

Ovviamente Leonardo si rendeva conto che per costruire macchine e progettare fortificazioni o opere idrauliche erano necessari dei calcoli. Si sforzò quindi di acquisire queste conoscenze, ma la sua competenza matematica rimase sempre piuttosto scarsa, almeno fino all'incontro, nel 1496, con il frate Luca Pacioli, che costituirà un punto di svolta per le competenze geometriche acquisite da Leonardo e per le sue idee sull'importanza della matematica nello studio della natura. Tuttavia, le conoscenze matematiche di Leonardo rimasero nel complesso inferiori rispetto ad altri artisti e tecnici del suo livello: niente a che vedere, ad esempio, con la preparazione matematica di Piero della Francesca (1416/17, 1492), che oltre a pittore era anche un matematico in grado di pubblicare lavori originali con risultati innovativi. Probabilmente era anche inferiore, nell'abilità di fare calcoli, a ingegneri suoi contemporanei come Francesco di Giorgio Martini (1439-1501) o Donato Bramante (1444-1514) coi quali Leonardo ha avuto frequenti contatti e scambi di idee.

Per capire meglio le possibili competenze matematiche di Leonardo e il suo modo di utilizzarle, occorre considerare la formazione di quanti appartenevano a quello strato culturale intermedio fra dotti e non dotti e che rappresenta una componente essenziale nel complesso panorama delle arti, delle scienze e delle tecniche che si sviluppano fra Trecento e Cinquecento.[9] Infatti, accanto alla matematica della tradizione universitaria, che privilegia gli aspetti più speculativi della matematica e li esprime in latino, va collocata una matematica pratica ad uso di artisti, artigiani e commercianti, espressa in lingua volgare. Secondo Carlo Maccagni (1982) Leonardo, che per formazione apparteneva a questo strato intermedio, presumibilmente riceve o almeno risente in qualche modo di questo tipo di educazione e di approccio alla matematica, riconducibile alle scuole d'abaco, prima di accedere alla bottega del Verrocchio. Questo non significa necessariamente che Leonardo abbia frequentato le scuole d'abaco in quanto il concetto moderno di "frequentare una scuola" è difficilmente applicabile al xv secolo. Comunque, seguendo ancora Maccagni, un'attenta considerazione di questo tipo di trasmissione del sapere, tipico delle classi intermedie che non conoscono (o conoscono in modo inadeguato) la lingua latina, «risulta indispensabile per poter procedere a una corretta lettura e a un'effettiva comprensione di quanto Leonardo ci ha lasciato» (Maccagni 1982, p. 54). Un apprendimento che privilegia nozioni di aritmetica pratica e commerciale, per lo più tramite trasmissione orale in lingua volgare, talvolta accompagnate da frammentari e disordinati appunti tratti dai libri di bottega. Questi contenevano soprattutto schizzi in grado di comunicare concetti rapidamente, con ricorso alla scrittura non sistematico ma occasionale per descrivere brevi tracce di procedure tecniche, senza giustificazioni né dimostrazioni. In queste scuole, destinate a futuri tecnici, artigiani, commercianti o scrivani, l'insegnamento veniva impartito soprattutto partendo da uno specifico problema concreto la cui risoluzione si basa sull'esperienza accumulata (si fa così perché si è sempre fatto così) e solo di rado, sulla base di molti casi simili, si giunge induttivamente a qualche generalizzazione.

Per quanto riguarda le conoscenze matematiche, Leonardo si può considerare essenzialmente un autodidatta. E non potendo attingere a testi in latino a causa della sua inadeguata conoscenza della lingua,

[8] L. Sinisgalli, *Il demone dell'analogia*, «Pirelli», gennaio 1949, pp. 11-13.

[9] C. Maccagni, *Considerazioni preliminari alla lettura di Leonardo*, in *Leonardo e l'età della ragione*, a cura di E. Bellone e P. Rossi, Milano, Scientia, 1982, pp. 53-67.

Leonardo fa di necessità virtù e si abitua a imparare direttamente dall'esperienza, nello spirito delle scuole d'abaco. Riesce quindi a creare un proprio metodo empirico che "interroga direttamente il libro della natura", anticipando di un secolo il metodo sperimentale di Galileo (ma senza pubblicare nulla in merito, i suoi appunti rimangono poco conosciuti fino al XIX secolo, e comunque la chiarezza con cui erano scritti non ha niente a che fare con quella di Galileo). Questo metodo Leonardo lo applicherà anche allo studio della geometria, nel quale partendo da un problema concreto analizzerà un grande numero di casi e varianti da cui procedere in modo induttivo a generalizzazioni. Come vedremo, utilizzerà poi originali metodi geometrici in quanto basati sull'idea di trasformazione e movimento, a differenza dei metodi statici della tradizione euclidea. Come afferma Carlo Maccagni (1982) «per comprendere Leonardo occorre tenere conto del 'paradosso dell'ignoranza' per il quale il non sapere può costituirsi come condizione di libertà rispetto ai legami della tradizione, divenendo talvolta una situazione favorevole per un più libero progredire».

Un altro approccio che Leonardo segue per apprendere e consolidare le sue conoscenze consiste nello scambio diretto di idee e nozioni: ogni volta che viene a contatto con un erudito o esperto di qualche campo che lo interessa lo interroga a fondo per apprendere il più possibile. Così farà in occasione dell'incontro a Milano con frate Luca Pacioli (1445 ca.-1517). Toscano anche lui (di Sansepolcro), Pacioli era un matematico famoso, uno dei pochi che fosse in grado di studiare e insegnare matematica dotta in latino e anche matematica d'abaco in volgare. Aveva da poco pubblicato a Urbino nel 1493 la *Summa de aritmetica, geometria, proporzioni et proporzionalità*, poi stampata nel 1494 a Venezia. Un'opera in lingua volgare, quindi preziosa per Leonardo che può finalmente avere un compendio completo delle conoscenze matematiche del tempo comprensibile anche per lui. Lo compra a 119 soldi (il doppio di quanto ha pagato la *Bibbia* in suo possesso, tanto che lo annota esplicitamente in uno nei suoi inventari di libri)[10] e forse è lo stesso Leonardo a mediare per far chiamare Pacioli alla corte di Milano. Tra i due si crea subito un forte sodalizio, Pacioli insegna la matematica a Leonardo, che ricambia illustrando con 60 tavole di stupendi poliedri il volume *De divina proportione*, pubblicato da Pacioli nel 1509.

Quando Pacioli arriva a Milano Leonardo ha 44 anni, è già pittore famosissimo e sta crescendo anche la sua fama di ingegnere militare, ideatore di macchine e abile scenografo di feste (con automi e macchine sceniche). Nonostante ciò, si mette a studiare matematica col frate, spinto dal desiderio di imparare cose nuove e di acquisire conoscenze di carattere interdisciplinare. Freud giudicherà questo atteggiamento come fanciullesco, per l'entusiasmo e la curiosità incontenibile, tipica dei bambini.[11] Spicca però anche la modestia: Leonardo è famoso e ricco, eppure continua a cimentarsi in campi in cui rischia di non essere all'altezza, come appunto la matematica.

In effetti, dopo il periodo trascorso a Milano con Luca Pacioli, Leonardo si appassiona alla matematica, soprattutto alla geometria di cui subisce il fascino e coglie la bellezza con la sensibilità del pittore, e realizza le rappresentazioni delle tavole con le figure solide per l'edizione del *De Divina Proportione*. Quanto all'algebra, Leonardo non riesce invece ad assimilarla, e quando cerca di utilizzarla continua a commettere errori, anche piuttosto ingenui. Afferma la superiorità della geometria rispetto all'algebra, del disegno rispetto al calcolo, così come in generale dell'immagine rispetto alla parola. E sarà questo anche il suo modo di studiare la geometria, con le pagine dei suoi taccuini densamente riempite di disegni e diagrammi fino ai margini, alla ricerca di metodi per trasformare triangoli, cerchi e loro porzioni in figure equiestese, grazie alla sua incredibile capacità pittorica e intuizione visiva. Sotto la guida di Pacioli riesce anche a impadronirsi di alcuni concetti e metodi della geometria di Euclide e a comprendere il concetto di dimostrazione, dedicandosi con passione e puntiglio allo studio delle figure geometriche.

Una passione che lo condurrà poi a scrivere nei suoi appunti: «Nessuna certezza delle scienze è dove non si pò applicare una delle scienzie matematiche, ovvero che non sono unite con esse matematiche».[12] E persino nel suo preludio di anatomia esprime un evidente omaggio a Platone: «Non mi legga chi non è matematico nelli mia principi».[13] Inoltre nel *Trattato della pittura*, l'unico libro di Leonardo che verrà pubblicato postumo nel 1650 da Richilieu a Parigi (grazie alla precedente sistemazione da parte del suo fedele allievo Francesco Melzi), viene seguita un'impostazione di tipo matematico, ovvero assiomatico-deduttiva in senso lato, e vi si legge:

> Nessuna umana investigazione si pò dimandare vera scienzia, s'essa non passa per le matematiche dimostrazioni, e se tu dirai che le scienzie, che principiano e finiscono nella mente, abbiano verità, questo non si concede ma si niega, per molte raggioni, e prima, che in tali discorsi mentali non accade esperienzia, senza la quale nulla dà di sé certezza.[14]

Sapeva anche, molto bene, che la geometria è necessaria per capire le leggi della prospettiva, e anche su questo intendeva scrivere un trattato rimasto però solo un'intenzione.

[10] *Codice Atlantico*, 228r/104r.

[11] S. Freud, *Un ricordo d'infanzia di Leonardo da Vinci (1910)* in *Psicoanalisi dell'arte e della letteratura*, Roma, Newton Compton, 1993.

[12] *Manoscritto G*, folio 96*v*.

[13] *Studi Anatomici*, libro IV, folio 116*r*.

[14] Leonardo da Vinci, *Trattato della Pittura, Parte prima Se la pittura è scienza o no*, Lanciano, Carabba, 1947.

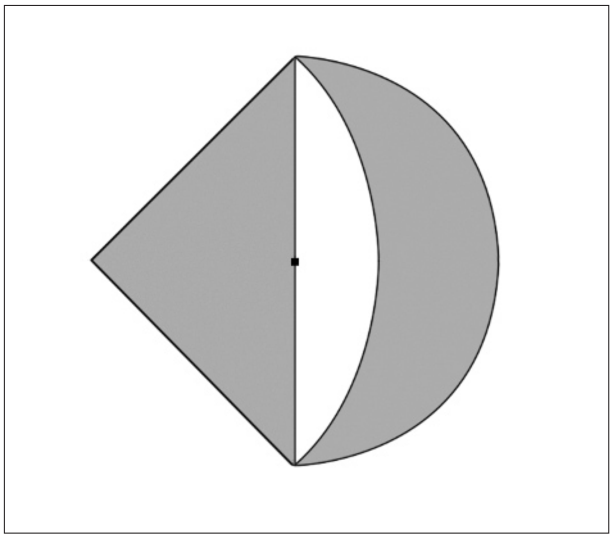

Fig. 3. La *lunula* di Ippocrate di Chio.

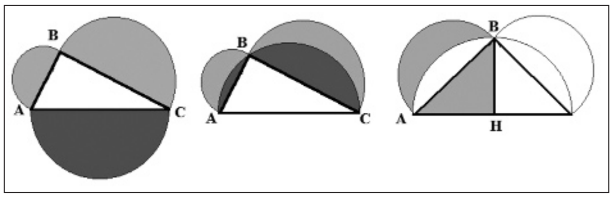

Fig. 4. Schema della dimostrazione della quadratura di Ippocrate.

Ma la matematica non viene solo vista da Leonardo come chiave per convertire le osservazioni empiriche in teoria e come linguaggio per esprimere le leggi della natura, bensì anche come passatempo e stimolo della mente per il puro piacere di risolvere enigmi e sfide intellettuali. A tale proposito è significativo ricordare che una parte meno nota del lavoro di Luca Pacioli e di Leonardo presso le corti rinascimentali consiste nell'organizzare spettacoli e intrattenimenti di corte, che includono anche giochi e enigmi di matematica dilettevole. In un taccuino manoscritto che Pacioli iniziò a scrivere poco dopo il suo arrivo a Milano, intitolato *De viribus quantitatis*, vengono descritti quesiti matematici e geometrici che si configurano come giochi di prestigio basati su enigmi numerici e costruzioni con riga e compasso, che hanno il solo scopo di «ponere et demostrare li admirandi e stupendi effecti che le ditta quantità procedano».[15] Ci sono anche scherzi e illusioni basate sullo scioglimento di nodi (che oggi classificheremmo come giochi topologici) o su effetti di fisica e chimica. Insomma, divertire e stupire con la scienza. Leonardo è menzionato molte volte negli appunti che formano il libriccino manoscritto, e probabilmente ha collaborato alla sua realizzazione.

Una simile collaborazione è stata accertata nella realizzazione di un altro testo di giochi del Pacioli, intitolato *De ludo scachorum* (chiamato dal Pacioli anche *Schifanoia*) un manoscritto, dedicato alla marchesa di Mantova Isabella d'Este, che riporta più di cento problemi di scacchi.

Questo per dire che l'aspetto ludico non può essere trascurato nell'esaminare lo spirito con cui Leonardo si accosta alla scienza, in particolare per quanto riguarda la matematica. Uno spirito che si vede chiaramente negli appunti dedicati al problema dell'equiestensione delle figure e in particolare della quadratura del cerchio o parti di esso, come le *lunule*. Ma come spesso accade, è proprio l'aspetto ludico che spinge l'intelletto a escogitare nuovi metodi per affrontare i problemi, e questo accade ovviamente anche a Leonardo che, nel confrontare poligoni e parti di cerchio, propone metodi innovativi che fanno ricorso al movimento e alla scomposizione e ricomposizione di figure geometriche: un tipo di geometria che lo studioso Frjtiof Capra (2007) ha definito «geometria dinamica», o «geometria di movimento», scorgendovi un'anticipazione della moderna topologia. Ma c'è anche chi ha visto in alcuni procedimenti geometrici di Leonardo delle intuizioni che sembrano anticipare alcuni concetti del calcolo differenziale e integrale che si affermeranno nel xix secolo. Il noto matematico toscano Francesco Severi (1879-1961) nel 1952, in occasione del cinquecentenario della nascita del suo conterraneo, mette in luce come, nonostante la sua scarsa preparazione matematica, Leonardo abbia avuto alcune notevoli intuizioni. Ad esempio, nel *Codice Atlantico*, proprio a proposito delle sue ricerche sulla quadratura del cerchio, Leonardo scrive «Questa tal prova resta persuasiva imaginando esser diviso il circolo in strettissimi paralleli, a modo di sottilissimi capelli in continuo contatto fra loro …»,[16] una bella intuizione che sembra un preludio al metodo degli indivisibili di Galileo-Cavalieri, a sua volta anticipazione del calcolo infinitesimale di Newton e Leibniz.

La quadratura delle *lunule* e la geometria dinamica

Come si è accennato nell'introduzione, l'interesse degli studiosi di geometria per le *lunule* nasce dalla dimostrazione del pitagorico Ippocrate di Chio, che nel v secolo a.C. considera una particolare *lunula* ottenuta sottraendo al semicerchio costruito sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele il settore circolare con centro nel vertice dell'angolo retto e raggio il cateto del triangolo (Fig. 3) e dimostra che l'area di tale *lunula* è uguale a quella del triangolo, effettuando così quella che probabilmente è la prima quadratura di una porzione di cerchio.

[15] Si veda V. Montebelli, *I giochi matematici nel* De Viribus Quantitatis in *Luca Pacioli e la Matematica del Rinascimento*, a cura di E. Giusti, Città di Castello, Petruzzi, 1998.

[16] Si veda F. Severi, *Leonardo*, Roma, Editrice Studium, 1954, p. 145.

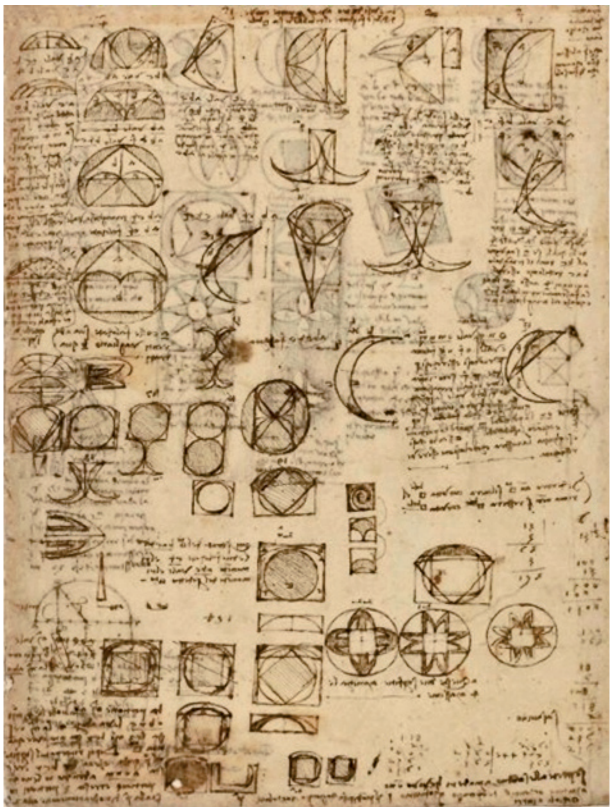

Fig. 5a. Leonardo, *Codice Atlantico*, folio 225*r*. (Milano, Veneranda Biblioteca Ambrosiana)

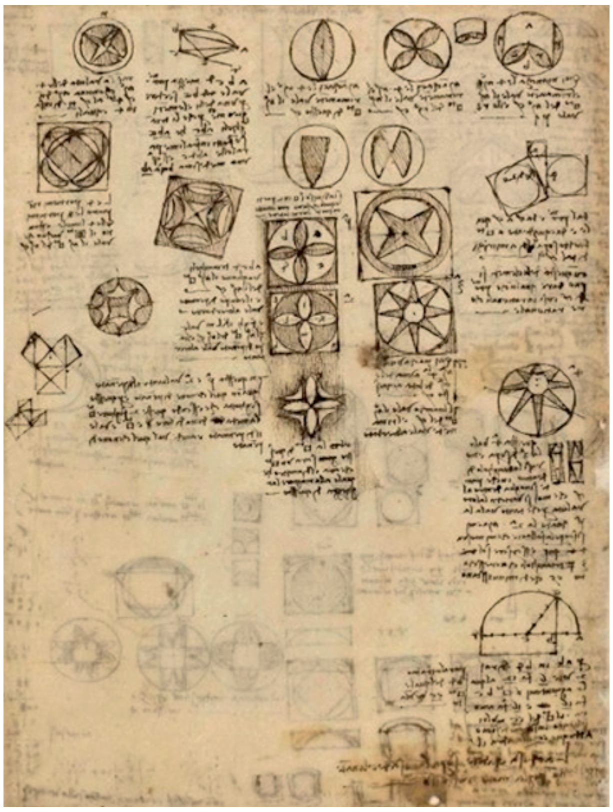

Fig. 5b. Leonardo, *Codice Atlantico*, folio 225*v*. (Milano, Veneranda Biblioteca Ambrosiana)

Questa dimostrazione può essere ottenuta in diversi modi, comunque è una conseguenza del teorema di Pitagora. Infatti, in un triangolo rettangolo, dall'equivalenza tra la somma dei quadrati costruiti sui cateti e quello costruito sull'ipotenusa si deduce in modo immediato l'equivalenza fra la somma dei semicerchi aventi per diametro i cateti e il semicerchio avente per diametro l'ipotenusa (Fig. 4 a sinistra). Se si ribalta il semicerchio sull'ipotenusa rispetto all'ipotenusa stessa (Fig. 4 al centro) questo passerà per il vertice B (essendo un triangolo rettangolo sempre inscritto nel semicerchio avente per diametro l'ipotenusa), si ottiene l'equivalenza fra le due *lunule* sui cateti (differenza fra i due semicerchi e i due segmenti circolari scuri) e il triangolo (differenza fra il semicerchio e gli stessi segmenti circolari). In particolare, se il triangolo oltre ad essere rettangolo è anche isoscele, si ottiene proprio il caso di Ippocrate (Fig. 4 a destra).

Una dimostrazione sicuramente alla portata di Leonardo, al quale piace "giocare" col teorema di Pitagora, come si può vedere ad esempio nel folio 225*v* del *Codice Atlantico* (Fig. 5b, al centro a sinistra), dove si può notare come il teorema di Pitagora applicato a un triangolo rettangolo isoscele venga usato per ottenere un quadrato di area doppia (Fig. 6 a sinistra): si noti come i quadrati costruiti sui lati siano scomposti in triangoli tutti uguali fra loro essendo le diagonali dei quadrati sui cateti uguali all'ipotenusa, tutte conseguenze del teorema di Pitagora. Nello stesso folio compare anche un utilizzo del teorema di Pitagora per dimostrare l'equivalenza fra aree di cerchi aventi diametri uguali ai lati in un triangolo rettangolo qualunque (Fig. 6 al centro), una estensione del teorema simile a quella descritta in Fig. 4 per i semicerchi. Nella parte alta dello stesso folio si può notare una immediata conseguenza del risultato di equiestensione di Ippocrate di Chio: se una *lunula* è equiestesa a un triangolo rettangolo isoscele (che è un quarto di quadrato) è facile dedurre che le quattro *lunule* ombreggiate della figura simmetrica riprodotta n Fig. 6 a destra sono equiestese al quadrato ombreggiato che ha per lati i diametri delle *lunule*. Questi sono solo alcuni dei tantissimi esempi che mostrano come Leonardo amasse divertirsi con la geometria per scoprire e riscoprire proprietà delle figure e nello stesso tempo ottenere rappresentazioni gradevoli all'occhio per la loro simmetria e per le loro proporzioni armoniche.

Dalla frenetica realizzazione di diverse situazioni geometriche e grafiche si può facilmente capire quanto Leonardo fosse affascinato da queste figure e dalle loro proprietà, tanto da continuare, negli anni che vanno dal 1505 al 1518, a riempire taccuini di disegni ombreggiati in cui sovrappone cerchi, segmenti circolari, *lunule*, settori circolari e altre parti di cerchio insieme a poligoni inscritti e circoscritti. Spesso con scomposizioni e spostamenti di parti per ottenere equivalenze fra le aree. Anno dopo anno, in una sorta di gioco ossessivo tra estetica e rigore geometrico e con un lavoro che fonde la sua incredibile capacità di visualizzare, scomporre, ricom-

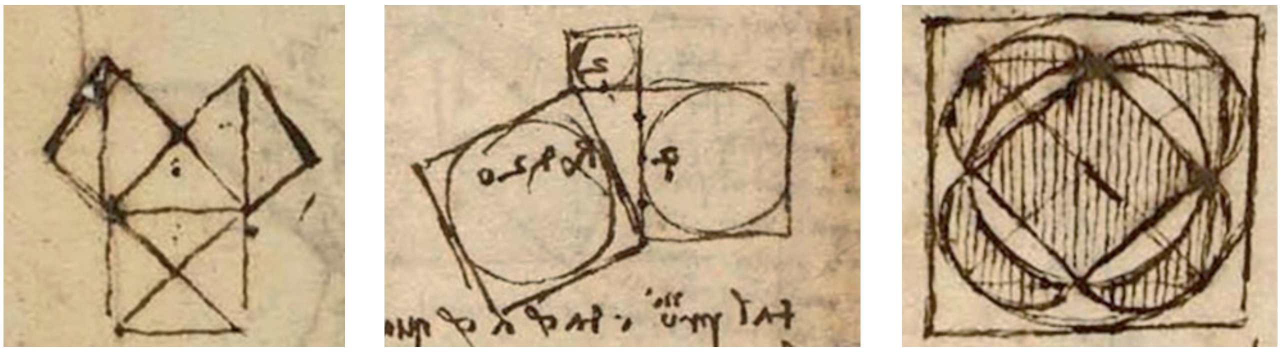

Fig. 6. Leonardo, particolari dal folio 225*v* del *Codice Atlantico*. (Milano, Veneranda Biblioteca Ambrosiana)

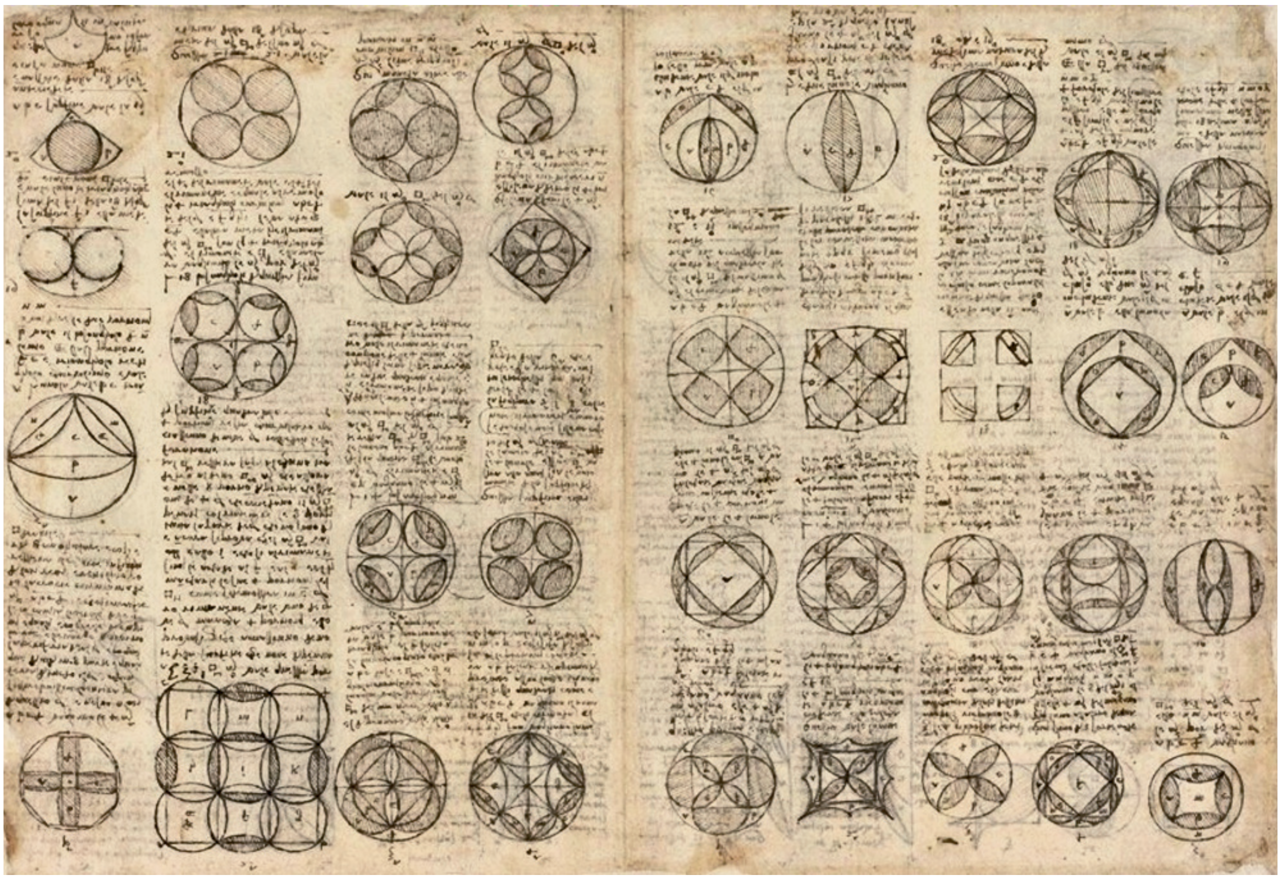

Fig. 7. Leonardo, *Codice Atlantico,* folio 471*v*. (Milano, Veneranda Biblioteca Ambrosiana)

porre e spostare figure, Leonardo rappresenta un enorme numero di casi da cui cercherà di ottenere risultati per via induttiva, con la tipica impostazione appresa nelle scuole d'abaco. Senza dimenticare gli aspetti ludici, che lo portano a disegnare bellissime composizioni geometriche simili a decorazioni e rosoni, Leonardo arriva anche a qualche risultato degno di nota, che gli procura grande soddisfazione, come quando scrive

Avendo io lungo tempo cerco di quadrare l'angolo di due lati curvi, cioè l'angolo il quale ha due lati curvi d'ugual curvità, cioè curvità nata d'un medesimo cerchio, [...] la vigilia di calendimaggio nel 1509, i'ho trovato il proposito, a ore 22 in domenica.[17]

Leonardo cerca di ottenere risultati di questo tipo per via geometrica, trasformando parti di cerchio in poligoni equivalenti. E ogni tanto ritorna a creare e studiare queste figure, talvolta ripartendo da situazioni già viste e proponendo nuove varianti, magari per ritrovare in modo diverso, sempre col supporto di bellissimi disegni, risultati già noti. Si veda ad esempio il folio 471*v*, datato 1516, riprodotto in Fig. 7, dove riconosciamo la *lunula* di Ippocrate con relativo triangolo rettangolo isoscele equiesteso (si veda il dettaglio riprodotto in Fig. 8 in alto a sinistra) ma i due segmenti circolari costruiti sui cateti, la cui somma è equiestesa al segmento circolare costruito sull'ipotenusa, sono ribaltati all'interno del triangolo ruotando sui cateti. Si forma così un nuovo "triangolo curvilineo", con tutti i lati costituiti da archi di circonferenza (come quello in basso a sinistra

[17] *Windsor*, RCIN 919145.

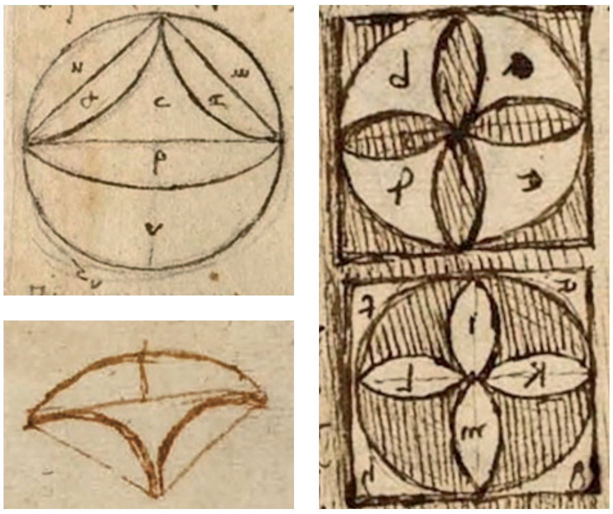

Fig. 8. Leonardo, dettagli del folio 471*v* (in alto a sx), 411*r* (in basso a sx), 225*v* (a destra), del *Codice Atlantico*. (Milano, Veneranda Biblioteca Ambrosiana)

in Fig. 8) che a sua volta è equiesteso al triangolo rettangolo isoscele. Ecco un nuovo caso di quadratura di una figura curvilinea, che ricorre in tanti degli schemi proposti da Leonardo nelle tavole del *Codice Atlantico*. Si veda, ad esempio, la superficie complementare al fiore a quattro petali (all'interno del cerchio in cui il fiore è inscritto) riportato a destra in Fig. 8, tratto dal folio 225*v* (Fig. 5b, al centro). Ebbene, ciascuna di quelle parti è equiestesa al corrispondente triangolo rettangolo isoscele, e quindi la loro somma ha la stessa area del quadrato i cui lati sono i segmenti che uniscono le punte dei petali, quadrato rappresentato in diversi disegni del folio 471*v* riprodotto in Fig. 7.

Come si può notare, si tratta di risultati geometrici ottenuti muovendo parti di figure tramite traslazioni, rotazioni, ribaltamenti. Come fa notare Frjtiof Capra (2007) si tratta di un approccio diverso da quello che troviamo negli *Elementi* di Euclide, in cui le figure sono proposte e analizzate in modo statico, mentre la geometria di Leonardo è intrinsecamente dinamica, una «geometria che si fa col moto».[18] Questo riflette il carattere interdisciplinare delle ricerche di Leonardo che, sia come artista, sia come studioso del moto dei fluidi (e nei fluidi, si pensi ai suoi studi sul volo degli uccelli), è abituato a osservare le trasformazioni che gli oggetti subiscono durante il moto. Ad esempio, osservando il flusso delle acque, Leonardo matura l'idea visiva, oltre che fisica, della conservazione del volume: quando una data quantità di acqua fluisce, la sua forma cambia ma il volume rimane uguale. Cosa che un artista come Leonardo conosce bene, nel momento in cui deve ritrarre corpi in movimento che cambiano continuamente forma ma la cui massa non viene alterata. Infatti Leonardo scrive

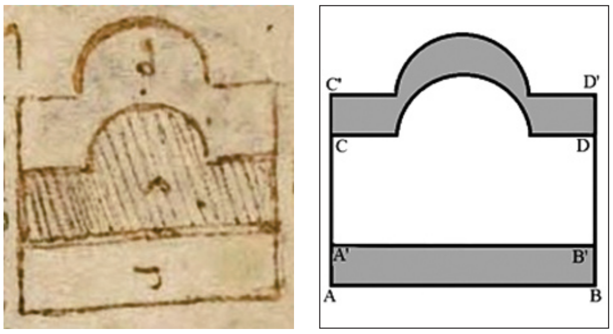

Fig. 9. Leonardo, dimostrazione di equiestensione per traslazione rigida in un dettaglio tratto dal *Codice Atlantico*, folio 505*r* (a sinistra). (Milano, Veneranda Biblioteca Ambrosiana)

Fig. 10. Leonardo, dimostrazione di equiestensione per traslazione rigida in un dettaglio tratto dal *Codice Atlantico*, folio 411*r* (a sinistra). (Milano, Veneranda Biblioteca Ambrosiana)

esplicitamente e chiaramente «D'ogni cosa che si move, tant'è lo spazio ch'ella acquista, quanto quello ch'ella lascia»,[19] un principio che vale per le deformazioni delle figure geometriche equiestese, ma anche per un braccio che si muove o per un torace che si piega o si torce. Si tratta di un caso particolare di trasformazioni che conservano certe proprietà, un modo decisamente moderno di studiare la geometria che ricorda la topologia fondata da Poincaré a fine Ottocento.

Accenniamo infine a un altro metodo dinamico utilizzato da Leonardo per dimostrare l'equiestensione di figure piane, basato sulla traslazione o scorrimento rigido unitamente al principio sopra enunciato che un tale movimento occupa nuovo spazio nella direzione verso cui avviene il moto equivalente allo spazio che libera dalla parte opposta. Si vedano, ad esempio, i due schizzi riprodotti in Figg. 9 e 10, scelti fra i tanti proposti da Leonardo nel *Codice Atlantico*. Per la forma riportata in Fig. 9, immaginiamo due figure congruenti sovrapposte e facciamo scorrere l'una rispetto all'altra. Lo scorrimento verticale occupa una parte di piano (la parte chiara in alto, sopra la zona ombreggiata) che ha parti curvilinee e lascia un'equivalente parte di piano (in basso, sotto la parte ombreggiata) di forma rettangolare. Evidentemente le due parti sono equiestese, e quindi Leonardo ottiene in modo dinamico un risultato di quadratura di una figura curvilinea. Un analogo discorso vale per lo scorrimento orizzontale mostrato nel dettaglio riportato a sinistra in Fig. 10.

[18] *Codice di Madrid ii*, folio 107*r*.

[19] *Codice Atlantico*, folio 152*v*.

La figura curvilinea sul lato sinistro, formata da due segmenti opposti paralleli e da due archi di circonferenza di medesimo raggio, è equiestesa alla somma dei tre rettangoli ombreggiati sulla destra.

Conclusioni

In questo breve articolo sono stati analizzati alcuni studi geometrici di Leonardo da Vinci (1452-1519) riguardanti soprattutto il problema dell'equiestensione delle figure piane, in particolare quelle con parti curve, cioè delimitate da archi di circonferenza. Attraverso questa analisi si è potuto riflettere sul *modus operandi* di Leonardo, non solo nello studio della geometria. Un metodo che parte dalla visualizzazione di un grande numero di casi dai quali ottenere informazioni sulla base di pochi principi di base e facendo leva sulla sua eccezionale abilità nella rappresentazione grafica. La *forma mentis* acquisita da Leonardo nello sperimentare, anziché attingere a testi di altri autori, gli ha permesso di procedere con tecniche originali nello studio della geometria, basate su una visione dinamica, di movimento, che probabilmente aveva acquisito attraverso i suoi studi legati alla pittura (saper cogliere i soggetti nel loro movimento) e alle scienze naturali (come il moto dei fluidi o il volo degli uccelli). Questo costituisce ancora oggi un grande insegnamento, perché la varietà di discipline diverse studiate da Leonardo non conduce a dispersività e superficialità, ma al contrario lo porta a operare sul terreno della contaminazione multidisciplinare, creando visioni più profonde e originali di quelle ottenute in una logica interna alle singole discipline. E proprio grazie alle particolari sinergie e fusioni create dalla sua mente plurima, unitamente all'abilità nel disegno, Leonardo è riuscito, nonostante le scarse conoscenze di base, a introdurre metodi del tutto personali e innovativi nello studio della geometria, che di fatto anticipano, magari in forma embrionale ma non banale, alcune branche della matematica che si sarebbero sviluppate alcuni secoli dopo, come la teoria delle funzioni e delle trasformazioni geometriche, la topologia fino ad alcuni concetti del calcolo differenziale e integrale. Infine è stato messo in evidenza come gli aspetti ludici nello studio della matematica, alimentati dall'amicizia di Leonardo con Luca Pacioli, esperto di matematica dilettevole, siano stati uno stimolo che ha incoraggiato e alimentato la passione di Leonardo per la geometria, che si è protratta negli anni della maturità del genio vinciano.

Referenze bibliografiche

Giorgio T. Bagni, Bruno D'Amore, *Leonardo e la Matematica*, Milano, Giunti, 2006.

Gian Italo Bischi, *Leonardo visto da Leonardo*, «Nuova Lettera Matematica», n. 1, 2020, pp. 113-121.

Fritjof Capra, *La scienza universale. Arte e natura nel genio di Leonardo,* Milano, bur Rizzoli, 2007

Sigmund Freud, *Un ricordo d'infanzia di Leonardo da Vinci (1910)* in *Psicoanalisi dell'arte e della letteratura*, Roma, Newton Compton, 1993.

Franco Ghione, *Pensieri matematici nell'immaginario di Leonardo da Vinci*, «Matematica, Cultura e Società, Rivista dell'Unione Matematica Italiana», vol. 4, n. 3, 2019, pp. 217-236.

Walter Isaacson, *Leonardo da Vinci*, Milano, Mondadori, 2017.

Carlo Maccagni, *Considerazioni preliminari alla lettura di Leonardo*, in *Leonardo e l'età della ragione*, a cura di E. Bellone e P. Rossi, Milano, Scientia, 1982, pp. 53-67.

Augusto Marinoni, *La teoria dei numeri frazionari nei manoscritti vinciani: Leonardo e Luca Pacioli*, «Raccolta Vinciana», 20 (1964).

Augusto Marinoni, *La matematica di Leonardo da Vinci: una nuova immagine dell'artista scienziato*, Milano, Arcadia, 1982.

Daniele Pasquazi, *La geometria intuitiva di Leonardo da Vinci*, «Matematica, Cultura e Società, Rivista dell'Unione Matematica Italiana», vol. 4, n. 3, 2019, pp. 237-258.

Furio Rinaldi, *"De Ludo Geometrico". La matematica e la geometria di Leonardo*, Novara, De Agostini Editore, 2013.

Francesco Severi, *Leonardo,* Roma, Editrice Studium, 1954.

Gian Italo Bischi (Urbino, 31 gennaio 1960), laureato in Fisica a Bologna, è professore ordinario di Matematica Generale e Metodi matematici per l'Economia presso l'Università di Urbino. Ha pubblicato articoli e libri sui modelli dinamici e le loro applicazioni alla descrizione di sistemi ecologici, economici e sociali. Si occupa anche di divulgazione, in particolare sulle connessioni fra la matematica e gli altri campi del sapere.

Matteo Bischi (Urbino, 28 febbraio 1992), laureato in Fisica della materia a Bologna è dottorando in Scienze della complessità presso l'Università di Urbino. Attualmente si occupa di metodi sperimentali per la ricerca e sviluppo degli specchi dell'interferometro "Virgo" per la rilevazione delle onde gravitazionali.