Modelli matematici e risorse rinnovabili: il dilemma del pescatore e altri apparenti paradossi

Gian-Italo Bischi
Facoltà di Economia, Università di Urbino "Carlo Bo",
e-mail: *bischi@econ.uniurb.it*

1. Introduzione

Col termine risorsa *rinnovabile* intendiamo una popolazione vivente, cioè in grado di crescere e riprodursi, che possa essere sfruttata per fini commerciali. Tipici esempi sono le popolazioni ittiche e le foreste. Si parla di sfruttamento *sostenibile* quando il prelievo della risorsa avviene in modo da non compromettere la capacità di rigenerarsi della risorsa stessa, permettendo così di tramandare intatta la risorsa alle generazioni successive. Invece, uno sfruttamento eccessivo può condurre a situazioni di inefficienza, sia biologica che economica, o addirittura provocare alterazioni irreversibili (al limite anche l'estinzione) della risorsa stessa. Purtroppo, la realtà ci mostra chiaramente che uno sfruttamento eccessivo, quindi non sostenibile, delle risorse naturali costituisce più una regola che un'eccezione. Spesso gli agenti economici che sfruttano una risorsa rinnovabile sono consapevoli di ciò, ma non riescono a trovare un compromesso fra le esigenze di sostenibilità e di guadagno. Uno dei problemi che stanno alla base di simili difficoltà è costituito dal fatto che spesso gli agenti economici sono alla ricerca di profitti immediati, mentre la sostenibilità si basa su una logica di lungo periodo. Un secondo problema, forse ancor più fondamentale, risiede nel fatto che molte risorse naturali sono risorse comuni, o condivise, e quindi ciascun agente ritiene trascurabile il proprio prelievo rispetto al prelievo totale, e quindi reputa ininfluente il proprio impegno a mantenere un atteggiamento conservativo se tale atteggiamento non è condiviso anche da tutti gli altri agenti che sfruttano la medesima risorsa. In altre parole, anche se un agente economico fosse consapevole della necessità di adottare politiche di sfruttamento moderato della risorsa, l'assenza di garanzie che anche gli altri facciano altrettanto lo porterà a cercare il massimo per sé nell'immediato. Poiché lo stesso ragionamento si estende a tutti gli agenti, questo condurrà inevitabilmente a una situazione di *sovrasfruttamento* e quindi di inefficienza. Quindi la ricerca del massimo rendimento individuale da parte di ciascun agente economico può portare al peggior rendimento collettivo, una situazione di inefficienza economica (oltre che biologica e sociale). Una simile situazione, che dopo l'articolo di Hardin (1968) viene spesso chiamata «*the tragedy of the commons*», è in netto contrasto col principio economico della «mano invisibile» enunciato da Adam Smith, secondo il quale se ciascun agente economico persegue l'ottimo individuale automaticamente si otterrà anche l'ottimo per la collettività.

Queste difficoltà ci mostrano chiaramente che il problema dello sfruttamento sostenibile delle risorse naturali richiede un'attenta analisi, che deve essere basata su un approccio fortemente interdisciplinare, dove si combinano competenze biologiche, economiche e sociali.

La complessità e la non linearità delle interazioni fra componenti biologiche ed economiche, che caratterizzano il problema dello sfruttamento della risorsa pesca, hanno recentemente condotto molti gruppi di ricerca a servirsi di modelli matematici, basati sul formalismo della teoria dei sistemi dinamici e della teoria del controllo, per una descrizione schematica e una migliore comprensione dei meccanismi evolutivi e delle possibili politiche di gestione (si veda ad esempio Rosser, 2001). In particolare, è doveroso menzionare il lavoro pionieristico del canadese Scott Gordon (1954), che ha avuto un forte impatto sulle decisioni politiche di gestione della pesca. Utilizzando semplici equazioni e argomentazioni matematiche, Gordon dimostrò che il libero accesso a una risorsa naturale di proprietà comune sarebbe sfociato, in assenza di politiche di regolazione, in un eccessivo sfruttamento della risorsa, provocando una forte inefficienza economica e biologica.

Nonostante la semplicità dei modelli proposti da Gordon, i risultati ottenuti ebbero un forte impatto, e aprirono la strada a una lunga serie di contributi, che hanno portato gradualmente a modelli via via più completi e all'utilizzo di strumenti matematici sempre più sofisticati. Questi sviluppi hanno trovato una sintesi e una sistemazione nella monografia di un altro canadese, Colin W. Clark, del 1976 (si veda anche la seconda edizione, notevolmente ampliata, del 1990) e hanno avuto un forte impatto sia sulle ricerche successive che sulle politiche adottate per la regolamentazione della pesca in un'ottica di sfruttamento sostenibile.

Il crescente interesse per la «*mathematical bioeconomics*», come è stata chiamata questa disciplina dopo la monografia di Clark, è stato favorito anche dal contemporaneo sviluppo dei metodi matematici per l'*analisi qualitativa dei sistemi dinamici non lineari* (per un'esposizione divulgativa dei concetti e metodi della teoria dei sistemi dinamici si veda Bischi et al., 2004). Tali modelli devono tenere conto di diverse componenti, di natura biologica, economica e sociale, e nel contempo conservare una certa semplicità ed

eleganza formale, per poter estrarre da essi informazioni comprensibili e sufficientemente generali. Il contrasto fra queste due opposte esigenze non ha mancato di sollevare critiche e perplessità, e alcuni sostengono che il fatto che i modelli matematici abbiano avuto tanto successo in fisica e ingegneria non implica che siano altrettanto utili anche in campi tradizionalmente considerati meno adatti a un simile approccio, quali l'economia, la biologia, la sociologia. Simili dubbi derivano dalla consapevolezza che tali sistemi sono caratterizzati da complesse interconnessioni, e sono influenzati da tanti fattori imprevedibili e difficilmente misurabili, che ne rendono talvolta problematica la riduzione a semplici schemi matematici.
Eppure, in questi ultimi anni, anche in queste discipline un numero sempre maggiore di problemi viene descritto in termini di modelli matematici. Da una parte, l'utilizzo del computer ha permesso di analizzare modelli con numerose e complesse equazioni, e quindi in grado di tenere conto di un numero molto elevato di dettagli significativi. Questo è l'approccio dei modelli di simulazione, utili nell'analisi di particolari sistemi, ma poco adatti a fornire informazioni generali. Inoltre il loro utilizzo, per forza limitato a risoluzioni numeriche, è spesso ostacolato dal fatto che raramente esistono in tali discipline dati sufficientemente precisi da permettere una stima rigorosa dei parametri contenuti nei modelli, e ciò rende difficile, a volte addirittura impossibile, un loro impiego per ottenere previsioni *quantitative* dell'evoluzione futura dei sistemi studiati. L'alternativa è di introdurre drastiche approssimazioni, trascurando tanti dettagli, per conservare nel modello solo gli elementi ritenuti più significativi. I modelli così ottenuti, pur apparendo come caricature del sistema reale, permettono un'analisi qualitativa delle loro proprietà anche attraverso metodi analitici, consentendo di ottenere conclusioni di validità più generale. Questo è proprio il modo di procedere della Fisica di Galileo e Newton: si pensi ai corpi puntiformi, ai pendoli con fili inestensibili e privi di massa, ai moti senza attrito e ai gas perfetti. Nella costruzione di tali modelli si parte dal più semplice possibile per poi introdurre un fattore di complessità per volta. Questo modo di procedere permette di capire quali sono gli effetti, sul comportamento del sistema, determinati da ogni particolare elemento rappresentato nel modello, suggerendo anche quali fattori, e sotto quali ipotesi, possono essere trascurati senza che questo alteri troppo i risultati. Modelli di questo tipo vanno quindi apprezzati per la loro capacità di fornire informazioni *qualitative e generali* su ampie classi di sistemi, piuttosto che per la loro precisione o per la descrizione quantitativa del comportamento di particolari sistemi (per un approfondimento si vedano Smith, 1975, Bischi, 1993).
In questa breve nota illustriamo alcuni semplici modelli utilizzati nello studio qualitativo delle politiche per la gestione della pesca commerciale.

2. Un modello dinamico che descrive lo sfruttamento di una popolazione naturale

Il più semplice *modello dinamico* per descrivere l'andamento nel tempo della quantità di una data risorsa rinnovabile è basato sull'equazione alle differenze

$$X(t+1) = F(X(t)) = X(t) + RX(t) - H(t) \tag{1}$$

dove t rappresenta il tempo, che si suppone scandito a intervalli (o periodi) discreti la cui durata viene stabilita in base alle caratteristiche del sistema considerato (giorni, mesi, stagioni, anni) ; $X(t)$ rappresenta una misura della risorsa disponibile (ad esempio la densità o la biomassa totale) ; R rappresenta la *crescita specifica ,* cioè il tasso di crescita nell'unità di tempo per unità di popolazione; $H(t)$ rappresenta la quantità di risorsa rimossa nell'unità di tempo (nel caso di risorse ittiche rappresenta il prelievo effettuato attraverso la pesca).
La funzione F, che rappresenta la legge di evoluzione temporale, permettere di calcolare la quantità che sarà presente nel periodo successivo, $t+1$, sulla base della quantità di risorsa presente al tempo t. Essa afferma semplicemente che la quantità presente nel periodo $t + 1$ è data da quella presente nel periodo precedente accresciuta della quota ottenuta mediante la crescita naturale e diminuita della quota prelevata. Quindi la legge di evoluzione (1) tiene conto sia delle caratteristiche biologiche e dell'ambiente, attraverso il fattore R, sia delle decisioni degli agenti, inglobate nella funzione H, mediante le quali vengono stabilite le quote da prelevare, tenendo conto di considerazioni economiche (massimizzazione dei profitti) nel rispetto dei vincoli imposti dalla legislazione corrente.
Notiamo che, in base all'equazione (1), la popolazione si trova in uno stato stazionario (o di equilibrio) in corrispondenza dei valori di X tali che $X(t+1) = X(t)$, ovvero $RX(t) = H(t)$. Questa equazione, detta equazione di equilibrio, afferma che il livello di popolazione rimane costante nel tempo se e solo se la crescita netta nell'unità di tempo risulta uguale alla quantità rimossa nell'unità di tempo. Ovviamente, se nel periodo t si verifica $RX(t) > H(t)$ allora la popolazione crescerà nel periodo successivo, cioè avremo

$X(t+1) > X(t)$, mentre se $RX(t) < H(t)$ allora la popolazione diminuirà nel periodo successivo, cioè avremo $X(t+1) < X(t)$.
In letteratura vengono anche proposti modelli in cui il tempo viene rappresentato mediante una variabile continua, nel qual caso la crescita periodale $X(t+1) - X(t)$ viene sostituita con la crescita istantanea, rappresentata dalla derivata dX/dt (si veda ad esempio la rassegna di modelli in Bischi, 1993). In questo contesto preferiamo limitarci alla descrizione di modelli a tempo discreto che, pur fornendo risultati molto simili, risultano più semplici da analizzare (per un confronto fra i due approcci si veda ad esempio Clark, 1990).

2.1 Dinamica di una popolazione non sfruttata

Se $H(t) = 0$, cioè in assenza di prelievo, l'equazione (1) descrive la dinamica naturale della risorsa, che dipende essenzialmente dalle proprietà biologiche della popolazione considerata e dalle caratteristiche dell'ambiente in cui vive. Per ottenere tale equazione partiamo dall'ipotesi che in ogni anno si riproduca una certa frazione n di individui della popolazione, dando luogo alla comparsa di nX nuovi individui nel periodo successivo, e che una certa frazione, diciamo m, muoia, e quindi un numero di individui pari a mX andrà sottratta. Si ottiene così la seguente legge di evoluzione :

$$X(t+1) = X(t) + nX(t) - mX(t) = (1 + n - m) X(t) \tag{2}$$

dove $R = n - m$ rappresenta il tasso di crescita specifico della popolazione.
Questa legge, o modello di evoluzione, si presenta nella forma $X(t+1) = a X(t)$, detta *lineare*. Essa rappresenta una *progressione geometrica* di ragione a, cioè :

$$X(1) = aX(0); \;\; X(2) = aX(1) = a^2X(0), \ldots, X(t) = a^t X(0) \ldots$$

Se $n < m$, quindi $a < 1$, allora si ha convergenza a zero (estinzione nel lungo periodo) con rapidità esponenziale. Nel caso particolare $n = m$ la popolazione si mantiene su un valore costante, pari alla popolazione iniziale. Invece, se $n > m$, ovvero $a > 1$, l'equazione (2) prevede una crescita esponenziale della popolazione. Questo costituisce uno dei principi di base dell'ecologia, secondo il quale una popolazione, in un ambiente caratterizzato da quantità praticamente illimitate di risorse vitali e spazio disponibile, si riproduce a un tasso direttamente proporzionale al numero di individui presenti. Questo principio era già stato enunciato con estrema chiarezza nel 1798 dall'economista inglese Thomas R. Malthus nel suo famoso saggio "An essay on the principle of population", dove affermava che la popolazione umana, se incontrollata, aumenta in progressione geometrica. Ovviamente, la crescita illimitata prevista da tale modello non può realizzarsi in un ambiente finito, e quindi il modello (2) può eventualmente essere considerato come un'approssimazione della legge di crescita di una popolazione nella fase iniziale, quando la popolazione è poco numerosa rispetto alle possibilità di spazio e cibo offerte dall'ambiente in cui si trova. Si fa allora l'ipotesi che il tasso di mortalità m non sia costante, ma aumenti al crescere della numerosità della popolazione, ad esempio $m = sX$Questo può essere interpretato come un effetto del sovraffollamento, che provoca carenza di cibo e spazio vitale (Malthus espresse questo concetto dicendo che, per quanti sforzi si facciano, i mezzi di sostentamento possono al più crescere in progressione aritmetica, e lo squilibrio fra la crescita esponenziale della popolazione e quella lineare delle risorse non può che provocare sofferenze e morte).
Con questa ipotesi, il tasso specifico di crescita diventa $R = n - sX$il cui grafico è una retta (fig. 1a). Il punto in cui R si annulla, dato da $K = n/s$, rappresenta un punto di equilibrio, in quanto è caratterizzato da crescita nulla, ed è chiamato *capacità portante*.
Il modello (2) diventa allora non lineare:

$$X(t+1) = F(X(t)) = (1+ n) X(t) - sX(t)^2 \tag{3}$$

Il grafico della funzione $F(X)$ è una parabola (fig. 1b) che interseca l'asse delle ascisse nei punti $X = 0$ e $X= (1 + n)/s$. I punti di intersezione con la bisettrice, caratterizzati dall'equazione $F(X) = X$, ovvero $X(t+1) = X(t)$, rappresentano gli equilibri del sistema dinamico, e sono dati da $X^*=0$ e $X^* = K$. Il primo corrisponde all'*equilibrio di estinzione* (o non esistenza) della specie e il secondo alla capacità portante.
Dalla definizione di equilibrio segue che se il sistema si trova, ad un certo istante, in uno di questi punti, lì resterà anche nei periodi successivi. Ma i due equilibri si comportano diversamente se modifichiamo leggermente il valore della popolazione rispetto al valore di equilibrio : nel caso di $X^*=0$ un piccolo incremento della risorsa sarà amplificato, e quindi i successivi valori $X(t)$ ottenuti iterando la (1) si

allontanano definitivamente dall'equilibrio originario, mentre nel caso dell'equilibrio $X^*=K$ le forze endogene del sistema tenderanno a smorzare ogni piccolo spostamento, e riportano il valore di $X(t)$ all'equilibrio originario, essendo $F(X)>X$ a sinistra di $X^*=K$ e $F(X)<X$ a destra (si vedano le frecce sulla figura 1b). In altre parole, un piccolo incremento della risorsa in un intorno dell'equilibrio $X^* = 0$ sarà amplificato, e quindi i successivi valori di $X(t)$ si allontaneranno definitivamente dall'equilibrio di estinzione, mentre nel caso dell'equilibrio $X^*=K$ le forze endogene del sistema tenderanno a smorzare ogni piccolo spostamento, e il valore della popolazione raggiungerà, dopo un certo numero di periodi (*transitorio*), il valore di equilibrio $X^*=K$, che quindi rappresenta un valore asintotico (o di lungo periodo). E' per questo che la capacità portante viene considerata il valore di equilibrio "naturale" della specie nel proprio habitat.

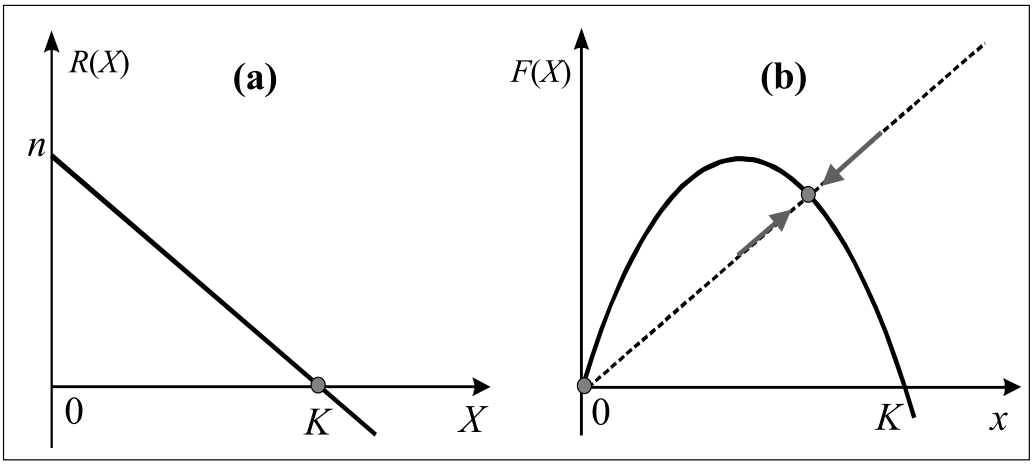

Fig. 1

L'instabilità dell'equilibrio di estinzione ci porta ad affermare che se per un qualunque motivo la popolazione venisse ridotta a poche unità, la sua capacità riproduttiva le consentirebbe, dopo un certo numero di periodi, di tornare all'equilibrio naturale, cioè al valore di capacità portante. Questa caratteristica delle popolazioni ittiche ha portato alcuni a ritenere che non ci fossero problemi di sostenibilità dell'attività di pesca. Per mostrare quanto questa opinione fosse radicata negli ambienti scientifici del suo tempo, Gordon racconta che la «Fishery Research Board» del Canada ordinò, nel 1939, di gettare forti dosi di veleno nell'acqua di un lago. Nonostante ogni forma di vita sembrasse scomparsa, solo due anni dopo si stimò la presenza di circa novanta mila pesci nel lago. Evidentemente bastarono pochi sopravvissuti per rigenerare la popolazione ittica. Ma i dati che venivano registrati in zone in cui si praticava la pesca intensiva portavano a conclusioni ben diverse circa la capacità di sopravvivenza delle popolazioni ittiche, e questo portò a un acceso dibattito sulla necessità di regolamentazione dell'attività della pesca.
Vediamo allora come i modelli matematici, nella forma (1), possono fornirci indicazioni su questo tema, e passiamo a considerare modelli con $H(t) > 0$, cioè in cui parte della risorsa viene rimossa mediante un'attività continuativa di sfruttamento controllato.

2.2 Prelievo con quote costanti

La piú semplice politica di prelievo controllato di una risorsa consiste nell'imporre una quota fissa prelevabile nell'unità di tempo, e ciò può essere modellizzato ponendo $H(t)$ uguale a un valore costante, diciamo h. Utilizzando la funzione di crescita (2), il modello (1) diventa:

$$X(t+1)= F(X(t) = X(t)\,(1 + n - s\,X(t)\,) - h \qquad (4)$$

Il grafico del secondo membro della (4) è ancora una parabola (fig. 2a), traslata di h unità verso il basso rispetto a quella mostrata in fig. 1b. Risolvendo l'equazione dei punti fissi $F(X) = X$, ovvero $sX^2 - nX + h$ =0, si hanno due soluzioni:

$$X_h = \frac{r - \sqrt{n^2 - 4hs}}{2s} \quad \text{e} \quad K_h = \frac{r + \sqrt{n^2 - 4hs}}{2s}$$

che sono reali e positive se $h < n^2 / (4s)$. Quindi, se la quota prelevata h non è troppo elevata, abbiamo due equilibri: X_h , instabile, e K_h , stabile (fig. 2a). Si può notare K_h < K, dove $K = n/s$ è la capacità portante della popolazione. In altre parole, in presenza di prelievo il valore di equilibrio stabile della popolazione è inferiore a quello che si avrebbe in assenza di prelievo, cosa piuttosto ovvia. Ma c'è qualcosa di più da notare: l'equilibrio instabile X_h rappresenta un valore di soglia tale che se il valore X(t) della biomassa diventa a un certo istante minore di X_h (ad esempio a causa di una mortalità imprevista o a causa di un prelievo non autorizzato) la dinamica successiva del sistema porterà verso valori negativi, ovvero verso l'estinzione, in un tempo finito.
Entrambi i valori di equilibrio dipendono dalla quota h, e al crescere di h si avvicinano tra loro: X_h aumenta e K_h diminuisce. Quindi, aumentando la quota prelevata nell'unità di tempo, non solo il valore di equilibrio della specie diminuisce, ma il valore di soglia sotto il quale la specie andrà all'estinzione aumenta, ovvero il sistema diventa più vulnerabile (fig. 2b). Quando il parametro h raggiunge il valore $h = n^2/4s$ i due punti di equilibrio si sovrappongono e la parabola diventa in essi tangente alla bisettrice, e un ulteriore aumento di quota h porterà alla scomparsa degli equilibri (Fig. 2c). Quindi, se la quota h supera il valore $n^2/4s$, detto valore di biforcazione, l'unica evoluzione possibile è quella che conduce all'estinzione.
Concludendo, l'analisi di questo semplice modello ci dice che la popolazione sfruttata commercialmente col metodo delle quote fisse di prelievo si assesta su un valore di equilibrio stabile, con una densità inferiore alla capacità portante della popolazione non sfruttata, a patto che la biomassa X non scenda al di sotto di una certa soglia X_h o che la quota h non superi il valore di biforcazione.

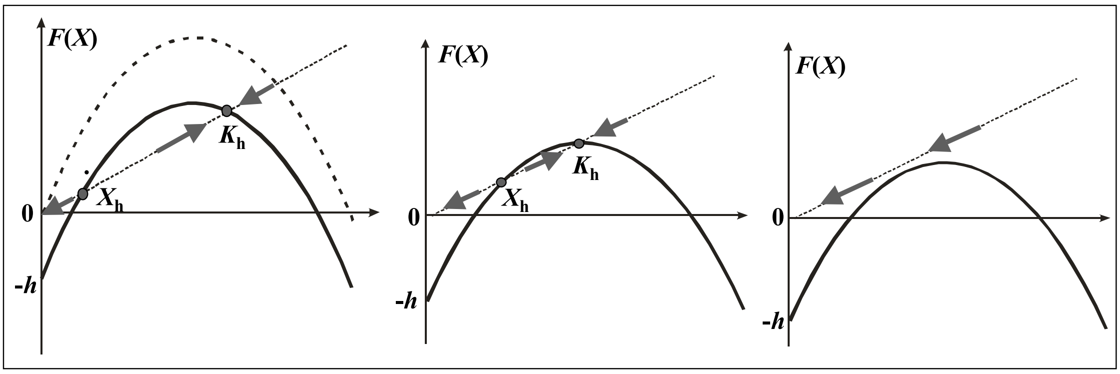

Fig. 2

2.3 Prelievo con sforzo costante

Consideriamo ora il caso in cui il prelievo della risorsa (possiamo pensare alla pesca, tanto per fissare le idee) avvenga con quote proporzionali alla biomassa

$$H(t) = q\,E\,X(t), \tag{5}$$

dove il parametro E è detto *sforzo nella pesca* (fishing effort) e dipende, ad esempio, dal numero dei pescherecci e dal tempo dedicato all'attività della pesca, mentre q, detto *coefficiente tecnologico*, tiene conto del grado di sofisticazione delle tecnologie utilizzate.
Con questo tipo di prelievo, il modello (2) diventa

$$X(t+1) = F(X(t)) = X(t)\,(1 + n - qE - s\,X(t)) \tag{6}$$

Il grafico della funzione $F(X)$ è quello di una parabola che passa per l'origine degli assi e ha come asse di simmetria la retta $X = (1 + n - qE)/(2s)$. Dall'equazione dei punti fissi, $F(X) = X$, si ottengono due equilibri :

$$X_0 = 0; \qquad K_E = (n - qE) / s$$

Supponiamo ora che la popolazione non sfruttata sia all'equilibrio stabile corrispondente alla capacità portante $K = K_0 = n/s$ (equilibrio con $E = 0$, cioè in assenza di prelievo) e immaginiamo di aumentare gradualmente lo sforzo nella pesca. Finché $qE < n$, l'equilibrio K_E si conserva positivo e stabile, e allo

stesso tempo l'equilibrio di estinzione $X_0 = 0$ risulta essere instabile. Comunque, al crescere dello sforzo E il valore dell'equilibrio positivo diminuisce, essendo K_E una funzione decrescente dello sforzo E (si vedano le parabole via via più basse tracciate in Fig. 3). Se lo sforzo E, o il livello di tecnologia utilizzato q, vengono aumentati fino a raggiungere il valore $qE = n$, i due equilibri si sovrappongono e un'ulteriore aumento provocherà una biforcazione in cui l'equilibrio K_E diventa instabile e negativo, l'equilibrio di estinzione X_0 diventa attrattivo. Questo significa che se qE supera il parametro n, che rappresenta il tasso di natalità della specie considerata, l'unica evoluzione possibile nel lungo periodo porta all'estinzione della risorsa.
E' interessante riportare su un grafico la produzione di lungo periodo $Y = qE\, K_E$, detta anche produzione sostenibile, in funzione dello sforzo applicato E. Se $E < n/q$ allora si ha $Y = qE(n - qE)/s$, mentre per $E > n/q$ si ha $Y = 0$. Si ottiene quindi un grafico come quello mostrato in fig. 3b. La massima produzione Y si ottiene per E = $n/(2q)$.

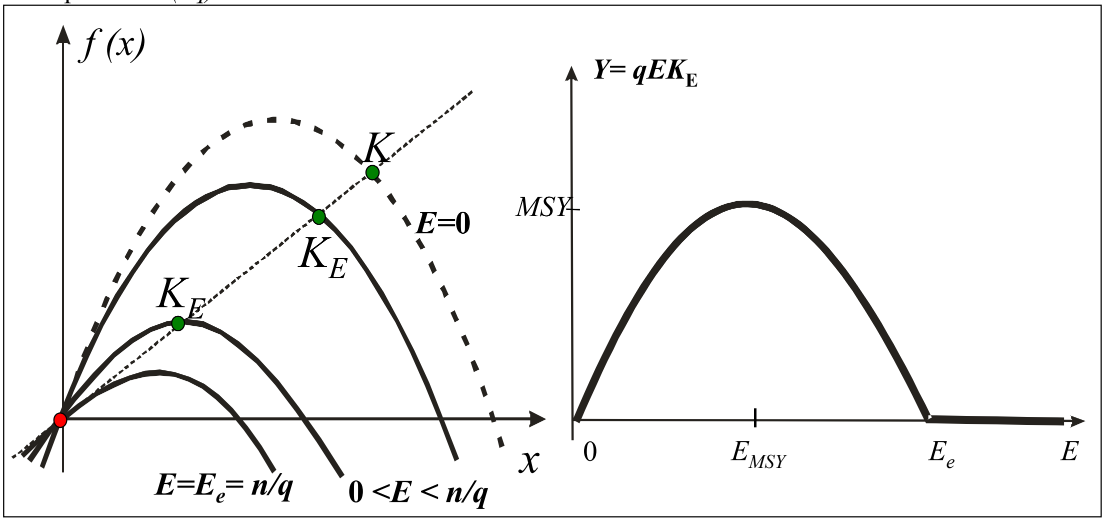

Fig. 3

Da questo grafico si può dedurre una importante proprietà che distingue una produzione basata su risorse rinnovabili : in base alla (5) uno sforzo maggiore implica una maggiore produzione nell'immediato (ovvero nel breve periodo), ma se si considera il sistema nel lungo periodo, cioè una volta raggiunto l'equilibrio, si vede che a un impegno maggiore può corrispondere una minore produzione se $E > n/(2q)$, addirittura nulla se $E > n/q$. Questa situazione deriva dal fatto che un prelievo eccessivo provoca una riduzione della popolazione sfruttata che, nel lungo periodo, porta a un minor rendimento dell'attività della pesca. La massima produzione che può essere mantenuta nel lungo periodo è detta *massima produzione sostenibile* (in inglese "Maximum Sustainable Yield", abbreviato come MSY) e il corrispondente sforzo è indicato col simbolo E_{MSY} in fig. 3b. Una situazione con $E > E_{MSY}$ viene detta di *sovrasfruttamento*.

3. Il paradosso di Gordon : se tutti vogliono guadagnare, nessuno ci guadagnerà

Finora ci siamo limitati a considerare le relazioni Y(E) fra sforzo e produzione sostenibile. In assenza di regolamentazione, lo sforzo viene deciso in base ai profitti attesi, cioè attraverso considerazioni di carattere economico. Seguendo l'approccio di Gordon (1954) e Shaefer (1957) assumiamo un prezzo p di vendita della risorsa e un costo c per unità di sforzo. Questo permette di calcolare il ricavo totale sostenibile, $TR = pY$, e il costo totale, $TC = cE$, quindi il profitto sostenibile $PR = TR-TC = pY- cE$. Nel grafico di fig. 4 il profitto è dato dalla distanza, calcolata sulla verticale, tra la parabola dei ricavi e la retta dei costi. Se la parabola sta sopra la retta il profitto è positivo (e quindi rappresenta un guadagno) mentre se la parabola sta sotto la retta il profitto è negativo (e quindi rappresenta una perdita).
Il ragionamento di Gordon può essere sintetizzato come segue . Supponiamo di operare in condizioni di libero accesso alla risorsa comune, e supponiamo che per un dato sforzo il profitto sia positivo, ovvero $E < E_b$ in fig. 4. Allora, attratti dalla possibilità di fare profitti, nuovi pescatori si aggiungeranno alla flotta, aumentando di conseguenza E, e questo continuerà finché $PR > 0$. Se invece si ha un profitto negativo, ovvero $E > E_b$, allora alcuni pescatori usciranno dalla competizione per dedicarsi ad attività più redditizie. Quindi questo processo di libera concorrenza porta inevitabilmente ad uno sforzo $E=E_b$, detto *equilibrio*

bionomico, dove non solo la risorsa è impoverita (siamo in condizioni di sovrasfruttamento essendo $E_b > E_{MSY}$) ma ogni rendita viene dissipata. E' ovvio che se ci fosse un accordo «cooperativo» fra i pescatori (o un intervento per la regolamentazione della pesca) il livello di sforzo verrebbe limitato al valore $E = E_m$ in cui il profitto è massimo (e la risorsa è in buone condizioni, essendo $E_m < E_{MSY}$).
Nonostante le evidenti semplificazioni contenute in questo modello, il paradosso da esso rivelato mette in luce i motivi di base che portano al principio generale che condizioni di libera competizione per lo sfruttamento di una risorsa comune conducono alla «tragedy of the commons» (Hardin, 1968).

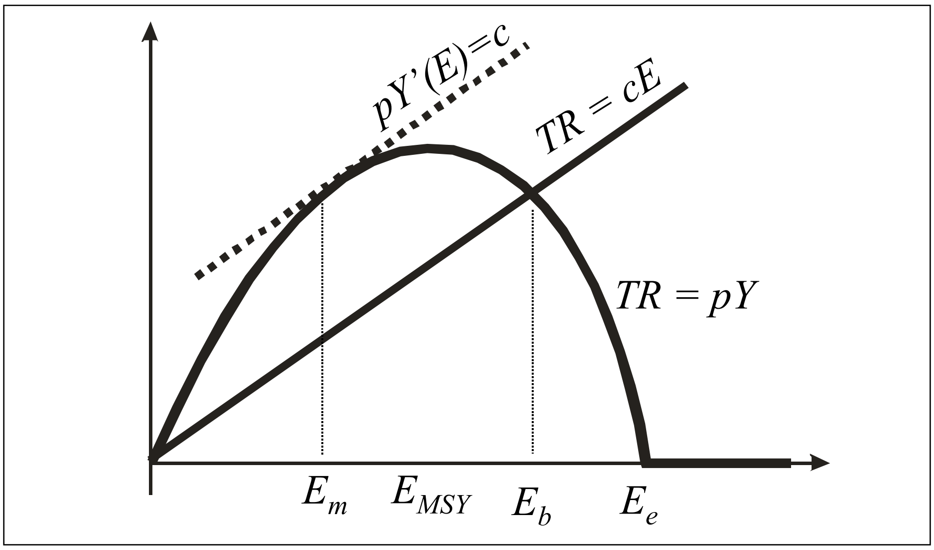

Fig. 4

4. Il paradosso di Clark : il dilemma del pescatore.

Nel linguaggio della teoria dei giochi, questa situazione si configura come un tipico dilemma del prigioniero (Luce e Raiffa, 1967, si veda anche Méro, 2001), che in questo contesto potremmo chiamare, seguendo Clark, *dilemma del pescatore*.
In questo gioco, si considerano due pescatori che pescano nello stesso mare, rappresentati con le lettere R e C (Riccardo e Carlo, le cui strategie sono rappresentate rispettivamente sulle righe e colonne della nella matrice dei payoff mostrata in fig. 5). Ciascun giocatore può scegliere fra due possibili strategie : sfruttare in modo moderato (atteggiamento cooperativo) o sfruttare a fondo (atteggiamento competitivo). I payoffs che compaiono nella matrice di fig. 5 rappresentano i profitti a lungo termine che ciascuno dei due ottiene dalla combinazione della propria strategia e quella dell'avversario : il primo numero in ciascuna casella è il payoff del giocatore R, il secondo il payoff del giocatore C (le unità adottate per misurare i profitti sono del tutto arbitrarie). Se entrambi adottano la strategia di sfruttare con moderazione allora la popolazione si mantiene in buone condizioni ed entrambi ottengono un buon payoff, rappresentato convenzionalmente da 3 unità ciascuno (quindi un totale di 6). Se uno dei due sfrutta intensivamente mentre l'altro si comporta da moderato, la popolazione sarà in condizioni un po' peggiori, e fornirà in tutto 5 unità, però il moderato avrà la peggio, ottenendo solo 1, mentre il pescatore con atteggiamento aggressivo otterrà 4. Se entrambi sfruttano in modo intensivo allora la popolazione verrà seriamente impoverita e fornirà ancor meno, 4 in tutto, e tale scarsa produzione andrà a ripartirsi equamente fra i due pescatori avidi, fornendo il magro raccolto di 2 unità per ciascuno. Se i pescatori sono lasciati liberi di competere allora la soluzione del gioco sarà la peggiore possibile . Infatti, mettiamoci nei panni del giocatore R : se C è moderato allora gli conviene sfruttare intensivamente perché così guadagna 4 anziché 3, mentre se C sfrutta intensivamente allora anche a lui conviene sfruttare intensivamente, perché così facendo prende 2 invece di 1. Lo stesso ragionamento vale per C (il gioco è simmetrico). Quindi, in mancanza di un accordo cooperativo (o una legge che li obblighi a cooperare) anche questo approccio suggerisce che la libera competizione porta alla peggiore evoluzione possibile.

Giocatore C / **Giocatore R**	Sfruttamento Moderato atteggiamento cooperativo)	Sfruttamento a fondo atteggiamento competitivo
Sfruttamento Moderato atteggiamento cooperativo	**3**, 3	**1**, 4
Sfruttamento a fondo atteggiamento competitivo	**4**, 1	**2**, 2

Fig. 5

Modelli bioeconomici basati sulla teoria dei giochi sono stati proposti da molti autori per descrivere situazioni con interazione strategica fra agenti che competono per lo sfruttamento di una risorsa comune (per una rassegna si veda Mesterton-Gibbons, 1993). Giochi dinamici di oligopolio, in cui le decisioni di ciascuno degli agenti che partecipano allo sfruttamento della risorsa si ripercuotono sull'intero sistema, sono stati proposti da Levhari e Mirman, 1982, Szidarovszki e Okuguchi, 1998, Bischi e Kopel, 2001. In questi modelli le funzioni $H(t)$ vengono decise dai giocatori stessi in base a criteri di massimizzazione dei profitti individuali, tenendo conto delle decisioni degli avversari (si dice che sono equilibri di Nash dei giochi di oligopolio).

Conclusioni.

In questa nota abbiamo illustrato alcuni tra i più semplici modelli matematici utilizzati per analizzare il problema dello sfruttamento economico delle risorse rinnovabili. Ovviamente simili modelli costituiscono solo un punto di partenza per la costruzione di modelli più completi e più aderenti alla realtà, ma inevitabilmente più complessi. Del resto questo è il metodo della scienza moderna: si isolano i fenomeni ritenuti essenziali per meglio studiare le relazioni di causa ed effetto, e sulla base di tali relazioni si costruiscono modelli mentali, che nel nostro caso abbiamo tradotto in modelli matematici (per una rassegna generale sul significato dei modelli, non solo di carattere matematico, si veda Piga, 1996). C'è da notare, comunque, che i modelli per descrivere lo sfruttamento delle risorse naturali non possono che essere basati su un approccio fortemente interdisciplinare, in quanto devono tenere conto di aspetti ecologici, economici e sociali. Da questo punto di vista, quindi, pur essendoci limitati a descrivere le situazioni più semplici, non abbiamo potuto utilizzare l'approccio tradizionalmente seguito in molte discipline scientifiche moderne, dove spesso si considerano modelli parziali, cioè relativi a grandezze e leggi interne alla disciplina considerata, e si basano su un approccio riduzionista, cioè isolano una porzione della realtà trascurando le connessioni e i meccanismi di reciproca influenza con l'ambiente circostante.
I modelli descritti in questa nota sono espressi attraverso due diversi linguaggi (o formalismi) della matematica moderna: la teoria qualitativa dei sistemi dinamici e la teoria dei giochi. L'estrema semplicità dei modelli descritti in questa nota non permette certo di trarre da essi soluzioni pratiche al problema dello sfruttamento sostenibile delle risorse naturali. Per simili scopi sono necessari modelli ben più complessi e articolati, che comunque sono ottenuti come sviluppi, generalizzazioni e ampliamenti di modelli semplici come quelli appena descritti. Una conclusione che possiamo ricavare dall'analisi svolta in questa breve nota è che occorre essere molto prudenti nello sfruttamento delle popolazioni naturali, e che quando i primi effetti negativi vengono alla luce potrebbe essere troppo tardi per porvi rimedio. Infatti, una delle caratteristiche che vengono messe chiaramente in luce dai modelli sopra esaminati è l'irreversibilità di certi fenomeni di degenerazione nelle dinamiche di lungo periodo. Questo ci spinge a evocare uno dei principi fondamentali nella gestione dei sistemi ecologici, il cosiddetto principio di precauzione.

Bibiografia

G.I. Bischi, «Modelli Matematici in Ecologia», *Archimede*, 4, 180-193, (1993).

G.I. Bischi, R. Carini, L. Gardini e P. Tenti "*Sulle Orme del Caos. Comportamenti complessi in modelli matematici semplici*" Bruno Mondadori Editore, Milano, 2004.

G.I. Bischi, M. Kopel,«The Role of Competition, Expectations and Harvesting Costs in Commercial Fishing» in *Oligopoly Dynamics: Models & Tools*, T. Puu and I. Sushko editors, Springer Verlag, 2002.

C.W. Clark, *Mathematical Bioeconomics*, 2nd edition, Wiley Interscience, 1990.

H.S. Gordon (1954), The economic theory of a common property resource: the fishery, *Journal of Political Economy*, 62, 124-142.

G. Hardin «The tragedy of the commons», *Science* 162, 1243-1247.

D. Levhari and L.J. Mirman, "The Great Fish War: An Example Using a Dynamic Cournot-Nash Solution" *The Bell Journal of Economics*, 11, 322-334 (1982).

R.D. Luce and H. Raiffa *Games and Decisions*, John Wiley, New York, 1957.

L. Méro *Calcoli morali : teoria dei giochi, logica e fragilità umana*, Edizioni Dedalo, 2001.

M. Mesterton Gibbons «Game theoretic resource modeling» *Natural Resource Modeling*, **7** (2), 93-147 (1993)

C. Piga, *Storia dei modelli. Dal tempio di Salomone alla realtà virtuale,* ISMES, 1996.

J.B. Rosser Jr. "Complex ecologic-economic dynamics and environmental policy" *Ecological Economics*, vol. 37, 23-37 (2001).

M.B. Shaefer Some considerations of population dynamics and economics in relation to the management of marine fisheries, *Journal of the Fishery Research Board of Canada*, 14, 669-681 (1957).

J.M. Smith, "*L'ecologia e i suoi modelli*", Biblioteca della EST Mondadori, 1975.

F. Szidarovszki and K. Okuguchi "An Oligopoly model of commercial fishing", *Seoul Journal of Economics*, **11**, 321-330 (1998).