

# Razionalità limitata e modelli dinamici adattivi in Economia

di GIAN ITALO BISCHI

*DESP, Dipartimento di Economia, Società, Politica,  
Università di Urbino “Carlo Bo”*

## 1 Introduzione

Da più di due decenni la modellistica economica sta mostrando un importante cambiamento nei propri paradigmi e metodi di lavoro e questa tendenza si è intensificata alla luce della recente crisi economica. L'approccio classico, basato sul paradigma dell'agente razionale rappresentativo, perfettamente informato e con capacità computazionali illimitate, sebbene abbia ottenuto importanti risultati, non riesce a spiegare in modo soddisfacente molti aspetti dei sistemi economici reali e viene da tempo criticato sotto differenti profili (Kirman, 1992; Simon, 1997). Nello stesso tempo, si è osservato in letteratura un crescente interesse per approcci alternativi, in cui *agenti eterogenei* e con *razionalità limitata* prendono decisioni utilizzando metodi euristici, basati su tentativi e errori (*trial and error*) o regole empiriche e di buon senso (*rules of thumb*) o persino semplice imitazione degli altri. Naturalmente, sulla base di queste ipotesi di razionalità limitata, generalmente gli agenti economici non risulteranno in grado di fare scelte ottimali; potranno tuttavia cercare di ottenere quello che Herbert Simon (1997) definì “sufficientemente buono” per i loro obiettivi, sostituendo in tal modo il concetto di comportamento ottimale (*optimal behavior*) con quello (apparentemente inferiore) di comportamento soddisfacente (*satisficing behaviour*) (si veda Simon, 1955, 1956).

Pertanto il risultato di questo approccio potrebbe sembrare, a prima vista, piuttosto riduttivo e poco idoneo a rappresentare il comportamento di agenti economici. Tuttavia un simile approccio diventa molto più interessante e significativo se viene applicato a ogni passo di un processo decisionale che si ripete nel tempo. Infatti, in certe circostanze, l'iterazione di decisioni effettuate sotto l'ipotesi di limitata razionalità, cioè basate su

meccanismi di “tentativi ed errori” o di imitazione dei migliori o di correzione delle discrepanze fra i risultati attesi e quelli osservati – tutti processi che denoteremo nel seguito come “*adattivi*” – potrebbe portare a comportamenti di lungo periodo molto più realistici (e persino più razionali) rispetto alle statiche, rigide e inalterabili ottimizzazioni prese come base indiscussa degli assiomi su cui si è finora fondato il presunto comportamento degli agenti economici cosiddetti razionali. Infatti l’ipotesi di completa razionalità su cui sono fondati i modelli economici standard, in cui si assume che gli agenti economici si comportino come se conoscessero le leggi che governano l’evoluzione dell’Economia, così come il fisico conosce le leggi del moto di semplici sistemi fisici, presenta notevoli debolezze dal punto di vista logico e può essere persino fuorviante se applicata in presenza di asimmetrie informative o informazione incompleta o in presenza di incertezze intrinseche, come accade per esempio in sistemi governati da leggi di evoluzione non lineari che possono essere anche caratterizzati dalla presenza di caos deterministico, ovvero da estrema sensibilità a perturbazioni anche arbitrariamente piccole (una situazione non troppo rara nei sistemi economici e sociali). Infatti agenti che si comportano in modo adattivo sono in grado, per definizione, di modificare e adattare alle circostanze le loro decisioni sulla base degli errori compiuti nel passato, in quanto a ogni passo del loro procedere per tentativi ed errori possono correggersi notando le discrepanze fra i risultati che si aspettano dalle loro decisioni e quelli che effettivamente si realizzano. Inoltre un sistema adattivo, sebbene sia governato da decisioni di breve periodo (dette anche miopi) effettuate da agenti limitatamente razionali ed eterogenei, può ugualmente convergere, *nel lungo periodo*, a un *equilibrio razionale*, cioè lo stesso equilibrio previsto (e istantaneamente raggiunto) sotto l’ipotesi di agenti economici pienamente razionali. Si parla in tal caso di *interpretazione evolutiva* degli equilibri razionali, che alcuni autori esprimono anche dicendo che agenti limitatamente razionali sono in grado di apprendere, nel lungo periodo, quello che agenti razionali si assume sappiano già a priori ma sotto ipotesi molto meno realistiche (si veda per esempio il testo di Fudenberg e Levine, 1998). Tuttavia, può succedere che facendo iniziare un simile processo evolutivo da diverse condizioni di partenza (oppure in seguito a una perturbazione esterna) uno stesso procedimento adattivo conduca verso un diverso equilibrio di tipo non ra-

zionale, cioè verso una situazione diversa da quelle previste sotto l'ipotesi ortodossa di economia con agenti razionali, situazione che potrebbe essere anche caratterizzata da una dinamica asintotica di tipo non stazionario, per esempio fluttuazioni persistenti che non si assestano mai su uno stato stazionario. La coesistenza di diversi tipi di dinamiche di lungo periodo (dette *attrattori*), ciascuna col proprio bacino di attrazione, genera la cosiddetta dipendenza dal percorso (o *path dependence*), associata a fenomeni di irreversibilità, isteresi o altre situazioni complesse, tipicamente non lineari, che si osservano spesso negli andamenti dei sistemi reali dell'Economia, Finanza e Scienze sociali. A questo proposito è utile menzionare l'interessante settore dell'Economia sperimentale, che sta fornendo un supporto empirico ai metodi e punti di vista innovativi dell'Economia evolutiva (Menkhoff e Taylor, 2007; Hommes, 2013).

Da quanto detto finora, è evidente che sistemi economici adattivi possono essere descritti matematicamente sotto forma di sistemi dinamici, cioè sistemi di equazioni differenziali ordinarie o equazioni alle differenze, e la teoria qualitativa (o topologica) dei sistemi dinamici non lineari, basata su concetti quali stabilità, biforcazioni, attrattori e loro bacini di attrazione, costituisce uno strumento privilegiato per lo studio delle loro proprietà asintotiche (ovvero di lungo periodo). Non solo in Economia e Scienze sociali, ma anche in discipline quali la Fisica, la Biologia o la Chimica, i modelli dinamici costituiscono un indispensabile strumento per la descrizione di sistemi che si modificano (ovvero evolvono) nel tempo, i cui attrattori che ne descrivono le evoluzioni di insieme e nel lungo periodo possono essere interpretati come "proprietà emergenti", talvolta difficili da prevedere solo in base alle leggi dinamiche locali.

Nel prossimo paragrafo vengono forniti alcuni semplici esempi di possibili rappresentazioni matematiche di sistemi adattivi, estratte dalla recente letteratura su sistemi con apprendimento o dal recente e ricco filone dei giochi evolutivi. Il paragrafo 3 conclude questa breve rassegna indicando anche alcune possibili estensioni e fonti per l'approfondimento dei temi esposti in maniera inevitabilmente superficiale.

## **2 Semplici formulazioni matematiche dei modelli adattivi**

In questo paragrafo descriviamo alcune rappresentazioni formali di modelli adattivi, nella forma di modelli dinamici deterministici a tempo di-

screto, senza alcuna pretesa di completezza e con il solo scopo di fissare con esempi concreti alcune delle idee generali delineate nell'introduzione. Come esempio guida per fissare le idee consideriamo dei modelli dinamici di oligopolio (si veda per esempio il volume Bischi *et al.*, 2010); comunque le stesse considerazioni possono essere facilmente adattate ad altri modelli che descrivono sistemi economici caratterizzati da agenti che prendono decisioni ripetute sulla base di processi adattivi.

Consideriamo un sistema economico il cui stato al tempo  $t$  è definito mediante i valori numerici di  $n$  variabili dinamiche, cioè il vettore di stato  $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$ . La forma standard della legge locale del moto a tempo discreto è espressa come:

$$x_i(t + 1) = f_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{m}), i = 1, \dots, n; \quad [1]$$

dove  $\mathbf{m} = [m_1, \dots, m_k]$  rappresenta un insieme di  $k$  parametri. Data la condizione iniziale  $\mathbf{x}(0)$ , che rappresenta lo stato del sistema a un dato istante di tempo, la legge del moto (1) permette di ottenere, induttivamente l'intera evoluzione (o traiettoria) del sistema  $\mathbf{x}(t)$ , per ogni  $t \geq 0$ . Il sistema dinamico discreto (1) esprime l'usuale principio di causalità secondo il quale in un sistema deterministico lo stato del sistema è determinato univocamente dallo stato immediatamente precedente tramite una legge assegnata che descrive come le forze che agiscono sul sistema descritto ne determinano i cambiamenti. Ovviamente le leggi che governano l'evoluzione di sistemi economici e sociali, essendo basate su decisioni umane, non possono prescindere da ipotesi concernenti il grado di razionalità con cui queste decisioni vengono prese. Inoltre le decisioni prese in un certo momento sono spesso influenzate dalle aspettative che gli agenti hanno sugli scenari attesi per il futuro del sistema di cui fanno parte (problema che non esiste, per esempio, nel caso di leggi fisiche che descrivono il moto di particelle). Questo ha importanti conseguenze sul modo di interpretare il principio di causalità, nel senso che il paradigma classico del determinismo laplaciano "lo stato attuale di un sistema evidentemente consegue dagli stati precedenti" nelle scienze economiche e sociali diventa "lo stato attuale di un sistema consegue dagli stati precedenti e dalle aspettative degli agenti che ne fanno parte circa i suoi stati futuri". Più formalmente:

$$x_i(t + 1) = f_i(x^a(t + 1), m) \quad [2]$$

dove  $x^a(t + 1)$  rappresenta lo stato atteso dall'agente  $i$ -esimo nel periodo successivo  $t + 1$  in base alle informazioni disponibili al tempo  $t$ . L'ipotesi di piena razionalità, che in un sistema deterministico equivale a quella di previsione perfetta (*perfect foresight*), cioè  $x^a(t + 1) = x(t + 1)$  per ogni  $i$  e per ogni  $t$ , afferma che ciascun agente è considerato in grado di prevedere gli stati futuri del sistema come se già conoscesse (e fosse in grado di risolvere) le equazioni che governano il sistema in cui opera. Sotto questa ipotesi (molto forte) il sistema dinamico si riduce a un sistema di equazioni le cui soluzioni costituiscono gli equilibri con aspettative razionali (*rational expectations equilibria*). Per esempio, in un modello di oligopolio le variabili dinamiche (nella formulazione *à la Cournot*) sono le quantità di un certo bene prodotte da imprese concorrenti nello stesso mercato e le funzioni  $f_i$  sono dette funzioni di reazione, calcolate sulla base di un problema di massimizzazione del profitto individuale  $\pi_i$ , cioè  $f_i = R_i = \text{argmax } \pi_i$ , rispetto a  $x_i$ . In questo caso, sotto l'ipotesi di aspettative razionali, le soluzioni di equilibrio sono localizzate in corrispondenza delle intersezioni delle funzioni di reazione e non sono altro che gli equilibri di Nash del gioco di oligopolio che si assume siano calcolate immediatamente da tutti gli oligopolisti.

Ipotesi più modeste riguardo alla razionalità delle imprese sono state introdotte in letteratura da molti autori. Per esempio lo stesso modello proposto da Cournot (1838) era basato sull'ipotesi di *aspettative naïve*,  $x_j^a(t + 1) = x_j(t)$ ,  $j \neq i$ : si assume cioè che ciascuna impresa, non avendo capacità di preveggenza, si aspetti che i concorrenti produrranno nel periodo successivo le stesse quantità che hanno prodotto nel periodo corrente. Naturalmente sanno che una simile aspettativa si rivelerà sistematicamente errata; tuttavia, sotto questa ipotesi di razionalità limitata, il modello (2) assume la forma standard di un modello dinamico a tempo discreto (1) e i suoi punti di equilibrio sono ancora equilibri di Nash, ottenuti semplicemente imponendo la condizione di stazionarietà  $x_i(t + 1) = x_i(t)$ . Quindi, nel caso di convergenza a un equilibrio, il modello di Cournot con aspettative *naïve* può essere visto come un approccio evolutivo al concetto di equilibrio di Nash, raggiunto – nel lungo periodo – attraverso decisioni ripetute di agenti limitatamente razionali. Inoltre, in ca-

so di molteplicità di equilibri di Nash, cioè quando le curve di reazione si intersecano in più punti, il processo adattivo di Cournot con aspettative *naïve* può essere utilizzato come meccanismo di selezione di un particolare equilibrio di Nash.

Le stesse considerazioni si possono applicare al seguente meccanismo adattivo in cui, dopo il calcolo della risposta ottimale (*best reply*), ciascun agente preferisce scegliere una combinazione convessa (cioè una media pesata) fra la risposta ottimale calcolata e la scelta che aveva effettuato nel precedente periodo, ovvero una forma di inerzia:

$$x_i(t + 1) = (1 - \lambda_i) x_i(t) + \lambda_i f_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{m}) \quad i = 1, \dots, n \quad [3]$$

dove i parametri  $\lambda_i \in [0, 1]$  danno una misura dell'inerzia in quanto per  $\lambda_i = 1$  l'agente  $i$ -mo sceglie la risposta ottima (nessuna inerzia), per  $\lambda_i = 0$  ripete la stessa scelta del periodo precedente (ignorando quindi la produzione ottimale calcolata) ovvero totale inerzia. Valori intermedi di  $\lambda_i$  rappresentano livelli intermedi di inerzia. Valori diversi dei  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , possono essere usati per rappresentare agenti eterogenei in quanto caratterizzati da diversi livelli di inerzia, interpretabili anche come diversi livelli di prudenza nell'effettuare scelte. Imponendo le solite condizioni di stazionarietà,  $x_i(t + 1) = x_i(t)$ , è immediato vedere che anche il modello di processo adattivo (3) ha gli stessi punti di equilibrio del modello con previsione perfetta e del modello con aspettative *naïve* senza inerzia e quindi può essere visto come un diverso meccanismo di selezione dell'equilibrio. Tuttavia, si possono avere altri tipi di attrattori (periodici o quasi-periodici o caotici) che saranno quindi "attrattori non razionali" e questi possono coesistere con gli equilibri razionali, ciascuno con il proprio bacino di attrazione. In altre parole, lo stesso modello adattivo può dar luogo sia a evoluzioni che convergono nel lungo periodo a un equilibrio razionale (cioè coincidente con quello a cui perviene lo stesso sistema con agenti razionali) che a situazioni di lungo periodo non razionali (e non stazionarie) a seconda delle condizioni di partenza del sistema. Questo significa anche che una perturbazione esogena potrebbe trasformare una traiettoria destinata a convergere a un equilibrio razionale in una che invece porta a una evoluzione in cui gli agenti non impareranno mai a comportarsi in modo razionale, cioè in cui continueranno sistematicamente a sbaglia-

re le loro previsioni (si veda per esempio il modello in Barucci, Bischi e Gardini, 1999).

Un altro interessante processo adattivo può essere ottenuto assumendo aspettative adattive:

$${}_t x_j^e(t+1) = {}_t x_j^e(t) + \alpha_i [x_j(t) - {}_t x_j^e(t)] = (1 - \alpha_i) {}_t x_j^e(t) + \alpha_i x_j(t) \quad [4]$$

in cui, in ogni periodo di tempo, il valore atteso viene calcolato attraverso una correzione che dipende dalla discrepanza osservata fra il precedente valore atteso e il valore della stessa variabile che si è effettivamente realizzato. Inserendo la (4) nella (2), si ottiene di nuovo un modello di apprendimento in quanto gli equilibri sono anche in questo caso gli stessi del modello basato sull'ipotesi di razionalità. Diverse applicazioni di questo tipo di apprendimento a modelli di oligopolio sono riportate nel libro di Bischi *et al.* (2010); si veda anche Bischi e Kopel (2001) mentre l'articolo di Bischi e Marimon (2001) mostra un'applicazione delle aspettative adattive a un modello di economia monetaria utilizzato per il controllo dell'inflazione.

In letteratura, si possono trovare molti meccanismi diversi per la formazione di aspettative. Per esempio:

$${}_t x_k^e(t+1) = {}_t x_k^e(t) + \alpha_i [x_k(t) - x_i^*] \quad [5]$$

descrive una situazione in cui l'agente  $i$  ritiene che una data variabile dinamica  $x_k$  si sposterà in ogni periodo di tempo nella direzione di un "valore fondamentale di riferimento"  $x_i^*$  con una velocità di aggiustamento (una specie di costante elastica di richiamo)  $\alpha_i \geq 0$ .

Altri agenti potrebbero invece comportarsi come "trend followers":

$${}_t x_k^e(t+1) = {}_t x_k^e(t) + \gamma_i [x_k(t) - x_k(t-1)] \quad [6]$$

nel senso che si aspettano una ulteriore crescita per una variabile che è cresciuta nel precedente periodo di tempo, un ulteriore calo se è decresciuta. Entrambi i tipi di aspettative (5) e (6) sono stati utilizzati in modelli dinamici applicati alla descrizione del comportamento degli agenti che operano nei mercati finanziari, suddivisi fra "fondamentalisti" e "specula-

tori” (*chartists*) che adottano il tipo di aspettative (5) e (6) rispettivamente per prevedere gli andamenti dei prezzi (si vedano per esempio Chiarella *et al.*, 2001-2011; Dieci *et al.*, 2010; Tramontana *et al.*, 2010; Hommes, 2001).

Si possono anche considerare schemi di ordine superiore, ovvero con una memoria più lunga, basati sull’osservazione di  $k > 1$  stati osservati nel passato, del tipo  ${}_t x_k^e(t+1) = \psi({}_t x_k^e(t-s), x_k(t-s))$ ,  $s=1, \dots, k$ . Per esempio, medie pesate che coinvolgono osservazioni della variabile in questione nei  $k$  periodi precedenti:

$${}_t x_k^e(t+1) = \sum_{i=1}^k w_i x_k(t-i), \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^k w_i = 1 \quad [7]$$

e persino medie che coinvolgono tutti i valori osservati da un certo periodo in avanti (*increasing memory*):

$${}_t x_k^e(t+1) = \sum_{i=0}^t w_i x_k(i). \quad [8]$$

Un esempio di aspettative calcolate mediante la [8] con pesi esponenzialmente decrescenti è stato utilizzato da Bischi e Naimzada (1997).

Altri modelli adattivi possono essere ottenuti assumendo agenti limitatamente razionali ed eterogenei che hanno una conoscenza inesatta dell’ambiente nel quale effettuano scelte, per esempio agenti che calcolano presunte produzioni ottimali utilizzando una congettura soggettiva (e spesso sbagliata) della funzione di domanda o delle funzioni di costo delle imprese che producono beni nello stesso mercato (Bischi *et al.*, 2004). Sotto queste ipotesi si possono modellizzare meccanismi adattivi in grado di correggere passo dopo passo le congetture soggettive in base alla discrepanze fra i valori osservati per certi indicatori economici e quelli previsti sulla base delle congetture. Dalla applicazione ripetuta di queste correzioni, il processo adattivo può, sotto determinate condizioni, portare a una graduale eliminazione delle distorsioni iniziali fino a una completa eliminazione degli errori permettendo quindi agli agenti di apprendere, nel corso dell’evoluzione del sistema, i valori veri dei parametri inizialmente errati. Esempi di schemi di apprendimento di questo tipo sono proposti negli articoli di Bischi *et al.* (2007, 2008).



Un altro meccanismo di aggiustamento adattivo, frequentemente usato nei modelli proposti in letteratura, consiste nell'assumere che ciascun agente  $i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , pur cercando di ottenere il massimo valore possibile di un dato indice di performance, diciamo  $\pi_i(\mathbf{x}(t)) = \pi_i((x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)))$ , non ha una conoscenza completa della funzione  $\pi_i$  oppure non ha le competenze o gli strumenti di calcolo per risolvere il corrispondente problema di ottimizzazione. Allora si assume che ciascun agente abbia una informazione locale sul valore della derivata parziale, ovvero il valore marginale, di  $\pi_i$  rispetto alla propria variabile decisionale  $x_i$ . Questa informazione potrebbe essere ottenuta in ciascun periodo di tempo mediante esperimenti economici o sociali – si vedano per esempio Arrow e Hurwicz (1960), Bischi e Naimzada (2000) – e ciascun agente usa questa informazione per modificare le proprie decisioni in accordo col seguente aggiustamento adattivo (noto come dinamica lungo il gradiente, o direzione di massima crescita):

$$x_i(t+1) = x_i(t) + \alpha_i(x_i) \frac{\partial \pi_i}{\partial x_i} \quad [9]$$

dove  $\alpha_i > 0$  è la velocità di aggiustamento che misura la reattività dell'agente  $i$  in risposta ai segnali di performance crescente.

Concludiamo questo paragrafo con una breve descrizione di un'altra importante e promettente tipologia di processi adattivi, ottenuti utilizzando il formalismo dei giochi evolutivi. In questo caso si considera una popolazione di  $N$  agenti, divisi in  $K$  sottogruppi che si distinguono per la strategia (o scelta) effettuata fra le  $K$  possibili (per esempio diversi modi di calcolare aspettative o diverse procedure di ottimizzazione adottate o decisioni prese sulla base di diversi insiemi informativi, ecc.). In altre parole, i  $K$  sottogruppi rappresentano altrettante regole di comportamento, quindi agenti tra loro eterogenei per il tipo di comportamento adottato. Sia  $n_i(t)$  il numero di agenti che adottano la regola (o strategia)  $i$  al tempo

$t$  e sia  $r_i(t) = n_i(t) / N$  la corrispondente frazione, con  $\sum_{i=1}^K r_i(t) = 1$  per ogni

$t \geq 0$ . La stessa notazione può essere usata per descrivere un singolo agente che a ogni periodo di tempo sceglie fra le  $K$  possibili strategie e allora  $r_i(t)$  viene interpretata come la probabilità di scelta associata alla strategia  $i$ .

Un meccanismo evolutivo consiste nel considerare le frazioni (o probabilità, a seconda dell'interpretazione)  $r_i(t)$  come variabili dinamiche endogene, la cui evoluzione nel tempo viene cioè determinata sulla base dei valori assunti da un indice di performance che fornisca una misura del successo (o *fitness*, o *payoff*) della strategia adottata, diciamo  $\pi_i(t) = \pi_i(\mathbf{x}(t)) = \pi_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  dove le variabili dinamiche  $x_i(t)$  esprimono misure associate alle strategie. Si conviene allora che in ogni periodo di tempo le frazioni di popolazione che adottano una certa strategia vengano aggiornate in base al principio che la frazione di agenti che hanno scelto la strategia che permette di ottenere, rispetto alle altre, un maggior *payoff* (o una maggior *fitness* o un maggiore indice di *performance*) crescerà maggiormente (rispetto alle altre) nel periodo successivo. In altre parole, si assume che alla fine di ciascun periodo ogni agente confronti il proprio *payoff* con il *payoff* medio della popolazione e decide di cambiare strategia se ha la possibilità di adottarne un'altra che permette di ottenere un *payoff* maggiore. Questo si può interpretare dicendo che ogni agente osserva il *payoff* ottenuto nel periodo di tempo corrente da un agente scelto a caso fra quelli che hanno effettuato una diversa scelta e, se il *payoff* dell'altro risulta superiore, decide di imitarlo. Il modello di questo tipo più comunemente proposto in letteratura è la "dinamica del replicatore" (*replicator dynamics*, Taylor e Jonker, 1978, si vedano anche Vega-Redondo, 1996, cap. 3, Hofbauer e Sigmund, 1988, cap. 7, Weibull, 1995, cap. 3). La dinamica del replicatore a tempo discreto è data da:

$$r_i(t+1) = r_i(t) \frac{\pi_i(t)}{\bar{\pi}} \quad [10]$$

dove  $\bar{\pi}(t) = \sum_{i=1}^K r_i(t) \pi_i(t)$  rappresenta il *payoff* medio osservato al tempo  $t$ .

Pertanto la (10) afferma che  $r_i(t+1)$  sarà più grande di  $r_i(t)$  se  $\pi_i(t) > \bar{\pi}(t)$ . La conseguenza è intuitivamente evidente: la regola comportamentale che fornisce *performances* migliori si espanderà rispetto alle altre disponibili, mentre quelle che forniscono risultati peggiori mostreranno una contrazione (Hofbauer e Sigmund 1988, p. 135).

Altri modelli economici evolutivi consistono nel considerare diversi comportamenti (per esempio, diversi modi di calcolare valori attesi di va-

riabili economiche come le aspettative razionali e le aspettative *naïve* o quelle adattive) e definire come indice di performance la discrepanza fra i valori attesi e quelli che effettivamente si realizzano, oppure i profitti ottenuti sulla base delle diversi schemi di aspettative adottati (si vedano Brock e Hommes, 1997, 1998; Hommes, 2013) oppure diversi atteggiamenti da parte degli operatori nel decidere come investire nell'ambito dei mercati finanziari (si vedano per esempio gli articoli di Chiarella *et al.* o Dieci *et al.* per trovare delle applicazioni alla descrizione di mercati finanziari con agenti eterogenei come per esempio speculatori e fondamentaliisti, oppure tori e orsi (*bulls and bears*) che adottano diverse strategie per fare previsioni sugli andamenti futuri dei prezzi) oppure diversi meccanismi di scelta delle produzioni in base ai profitti attesi (Droste *et al.*, 2002; Bischi *et al.*, 2004, 2013). Interessanti applicazioni della dinamica del replicatore si possono trovare anche nei modelli dinamici che descrivono lo sfruttamento sostenibile di risorse rinnovabili, come la pesca commerciale (Sethi e Somanathan, 1996; Bischi *et al.*, 2004, 2013).

La dinamica del replicatore non è l'unico meccanismo evolutivo per la selezione delle migliori strategie; si vedano per esempio Brock e Hommes (1997, 1998), Droste *et al.* (2002), Chiarella *et al.* (2011) in cui vengono proposti altri meccanismi che regolano i cambiamenti di strategie nel tempo insieme a diverse loro applicazioni. Altre generalizzazioni includono modelli con  $m$  popolazioni (per esempio  $m$  nazioni o  $m$  distretti industriali) con diversi numeri di agenti, diciamo  $N_1, \dots, N_m$ , ciascuno con un dato numero di strategie (o regole di comportamento) disponibili  $K_1, \dots, K_m$ . Per esempio in Bischi, Dawid e Kopel (2003) si considera il caso di due popolazioni di imprese (ovvero due distretti industriali) ciascuno con due strategie disponibili (investire nell'industria o in un mercato finanziario) con un meccanismo endogeno di passaggio da una strategia all'altra basato sull'imitazione del migliore, ovvero alla strategia che nel periodo precedente ha permesso di ottenere maggiori profitti. Altri esempi di evoluzione spinta dall'imitazione possono essere trovati in Hofbauer e Sigmund (1988), Bischi *et al.* (2006).

Tutti i modelli descritti finora vengono rappresentati nella forma di sistemi dinamici non lineari a tempo discreto. Comunque esistono in letteratura anche diversi esempi di modelli adattivi o evolutivi nella forma di sistemi dinamici a tempo continuo, espressi cioè come sistemi di equazio-

ni differenziali ordinarie del primo ordine. La scelta fra questi due diversi modi di rappresentare il tempo non è ovvia né priva di conseguenze dal punto di vista dei risultati che si ottengono. Se è vero che il tempo è una variabile di per sé continua, è anche vero che spesso nei sistemi economici i cambiamenti avvengono a tempi discreti in conseguenza di atti decisionali che non possono essere rivisti in ogni istante, ma solo con certe scadenze. Una scelta intermedia è data dai sistemi dinamici ibridi, caratterizzati dalla presenza di variabili dinamiche che evolvono a tempo continuo e altre che possono cambiare solo a intervalli discreti, su una scala di tempo scandita da decisioni. Metodi per lo studio di simili sistemi si possono trovare nella recente letteratura fisico-matematica e cibernetica e solo recentemente sono stati applicati anche allo studio di sistemi economici; si veda per esempio l'articolo di Bischi *et al.* 2013.

Altrettanto interessanti sono i modelli dinamici a tempo continuo con ritardi discreti o distribuiti, utilizzati per rappresentare sistemi in cui intercorre un certo tempo fra cause ed effetti oppure sistemi in cui il tasso di crescita di una variabile a un certo istante dipende da una porzione finita di storia precedente (simili modelli vengono anche chiamati sistemi dinamici con memoria). Essi sono rappresentati da equazioni integrodifferenziali (nel caso di memoria distribuita) o equazioni miste differenziali e alle differenze ovvero con argomenti ritardati di un dato intervallo fisso di tempo. Modelli di questo tipo sono molto studiati anche nell'ambito della Meccanica dei materiali elastici e in Ecologia matematica (si veda per esempio Cushing, 1977) e sono stati solo recentemente applicati alla descrizione dei mercati di oligopolio per rappresentare agenti che apprendono dal passato o imprese che accumulano conoscenze grazie a investimenti in ricerca e sviluppo effettuati nel corso della loro storia; si vedano, per esempio, i recenti articoli di Matsumoto e Szidarovszky (2010, 2012).

Occorre precisare che l'utilizzo di modelli dinamici non lineari in Economia è una pratica consolidata fin dagli anni '50 e anche nei modelli neoclassici la teoria dei sistemi dinamici non lineari ha permesso di ottenere importanti risultati. Tuttavia, il suo uso è stato spesso limitato all'analisi dei comportamenti locali ottenuta mediante l'usuale procedura di linearizzazione per descrivere tali modelli in un intorno dei punti di equilibrio, un approccio che non si presta quindi a mettere in evidenza quei fenomeni dinamici di carattere globale legati all'insorgere delle pro-

prietà emergenti e di insieme. Solo recentemente sono stati utilizzati in ambito economico e sociale metodi matematici che descrivono proprietà dinamiche e biforcazioni di carattere globale, basati su appropriati abbinamenti di tecniche geometriche e numeriche. Esempi si possono trovare nella letteratura su modelli con agenti eterogenei e interagenti (Hommes, 2013) e più in generale sui cosiddetti modelli ad agenti (*agent-based models*, Tesfatsion e Judd, 2006). Questi modelli si prestano anche a verifiche nell'ambito dell'Economia sperimentale. Esempi di questi approcci innovativi si possono trovare in Westerhoff e Dieci (2006), Dawid e Neugart (2011).

Altri approcci di dinamica globale proposti recentemente nella letteratura economica comprendono la teoria dei sistemi dinamici differenziabili a tratti o addirittura discontinui; si vedano Gardini *et al.* (2008), Tramontana *et al.* (2010), oppure lo studio delle biforcazioni globali di contatto, incluse le biforcazioni omocline (Agliari e Vachadze, 2011; Bischi *et al.*, 2003; Dieci e Gallegati, 2011; Dal Forno e Merlone, 2010), e anche le simulazioni numeriche di sistemi dinamici con disturbi stocastici (*random noise*, si veda per esempio Chiarella *et al.*, 2013).

### 3 Ulteriori considerazioni

In questa breve rassegna abbiamo proposto una panoramica di alcuni modelli dinamici proposti nella recente letteratura per descrivere processi adattivi (detti anche miopi o *step-by-step*) utilizzati per rappresentare il comportamento di agenti economici limitatamente razionali che cercano di raggiungere passo dopo passo, nel lungo periodo, se non proprio livelli ottimali almeno livelli migliori di *performance*. Mentre i modelli ortodossi e *mainstream* utilizzati in Economia si basano sull'ipotesi di agenti economici perfettamente informati e con capacità computazionali tali da metterli in grado di capire l'evoluzione dei sistemi in cui stanno operando in modo da potersi coordinare nel raggiungimento istantaneo degli obiettivi ottimali, i modelli economici evolutivi, o adattivi, assumono comportamenti euristici, miopi, con aspettative che si correggono sulla base degli errori commessi, probabilmente più idonei a descrivere i comportamenti che si osservano nel mondo reale (Boulding, 1991). In particolare, i modelli economici espressi nel formalismo dei giochi evolutivi – cioè modelli dinamici in cui popolazioni di agenti economici possono effettuare

scelte ripetute fra diverse regole comportamentali selezionando ogni volta quella che viene giudicata migliore dal punto di vista di determinati indici di *performance* – hanno ricevuto crescente attenzione nella recente letteratura e si prestano a interessanti sviluppi anche nel promettente campo dell’Economia comportamentale (*behavioural economics*) dove le diverse strategie di comportamento tengono conto di atteggiamenti degli agenti condizionati da influenze sociali, culturali e psicologiche che spesso vengono osservate nei sistemi reali e negli esperimenti.

L’estensione dei concetti di adattamento e selezione naturale da contesti biologici a quelli economici e sociali sta portando nuove idee e fertili terreni di indagine (Dosi, 1991; Dosi and Nelson, 1994). Numerose applicazioni vengono proposte in connessione con l’analisi dei dilemmi sociali e l’affermazione di convenzioni o di nuovi standard. Esempi riportati in letteratura includono il confronto fra egoismo e cooperazione nelle versioni evolutive di dilemmi del prigioniero (dove la cooperazione è Pareto-dominante mentre l’atteggiamento egoistico costituisce un equilibrio di Nash) oppure vari tipi di giochi di coordinamento a più equilibri di Nash che si prestano a interessanti applicazioni a problemi di gestione sostenibile dell’ambiente o all’economia delle risorse comuni (si vedano Ostrom, 2000; Young, 1993, 1998). Questioni che diventano ancor più interessanti se considerate come problemi di controllo ottimo con orizzonte temporale indefinito (Hodgson, 1993; Hodgson and Knudsen, 2006, 2010).

È importante notare che la descrizione di sistemi reali mediante modelli adattivi richiede spesso un approccio interdisciplinare, unitamente all’utilizzo di vari metodi matematici, che vanno dalla teoria dei sistemi dinamici non lineari alla teoria dei giochi, dal controllo ottimo ai metodi numerici e simulativi.

I modelli adattivi in generale, e quelli basati sui giochi evolutivi in particolare, offrono un ricco spettro di possibili previsioni oltre a criteri endogeni di selezione fra più equilibri possibili o evoluzioni dinamiche più complesse mostrando fenomeni tipicamente non lineari quali irreversibilità, proprietà globali emergenti, dipendenza dalle condizioni iniziali. In particolare la necessità di specificare le condizioni iniziali, oltre alle informazioni standard legate alle funzioni obiettivo e vincoli che caratterizzano le decisioni dei modelli più ortodossi, costituisce un elemento che permette di recuperare un ruolo della storia (*path dependence*) e delle

perturbazioni (*hystorical accidents*) grandi o piccole che siano, che condizionano l'evoluzione nel tempo di un sistema complesso, non lineare. Inoltre, l'orizzonte temporale che viene considerato dello studio standard delle proprietà asintotiche dei sistemi dinamici, legato al concetto matematico di limite per tempi infiniti, potrebbe in certi casi diventare poco utile, persino fuorviante, nell'analisi e controllo di sistemi economici. In altre parole, potrebbe essere necessario in certi casi soffermarsi anche sulle dinamiche di breve e medio periodo considerando anche scale di tempo diverse e distinguendo fra le variabili più veloci e quelle più lente e anche fra quelle che tendono ai valori di equilibrio con andamenti monotoni o oscillatori.

Tuttavia, anche se la letteratura basata su modelli evolutivi e con agenti a razionalità limitata sta riscuotendo successi crescenti, il suo impatto risulta essere ancora piuttosto modesto e le sue applicazioni ancora isolate e di nicchia rispetto ai modelli ortodossi con agenti razionali. L'utilizzo di modelli adattivi presuppone anche un diverso punto di vista sulle politiche economiche da adottare per progettare e controllare sistemi economici e finanziari. L'approccio standard neoclassico è basato su ipotesi forti di conoscenza e razionalità da parte di tutti gli agenti economici e quindi si assume implicitamente che sistemi economici anche complessi siano in grado di assestarsi su un equilibrio efficiente senza la necessità di interventi da parte di autorità centrali o tutt'al più con interventi dalla mano leggera. In un simile contesto la teoria economica viene considerata come una scienza basata su principi teorici e leggi universalmente note agli agenti che vi operano, sebbene questo punto di vista abbia sollevato molte obiezioni dal punto di vista epistemologico (Aghion e Howitt, 2007). I modelli adattivi possono allora rappresentare interessanti "laboratori" per valutare l'impatto di politiche economiche sotto scenari alternativi caratterizzati da ipotesi più flessibili riguardo al comportamento degli agenti e alle loro capacità reattive.

### **Bibliografia**

Aghion P. e Howitt P. (2007), "Appropriate Growth Policy: A Unifying Framework", *Journal of European Economic Association*, 4, pp. 269-314.

Agliari A. e Vachadze G. (2011), "Homoclinic and Heteroclinic Bifurcations in an Overlapping Generations Model with Credit Market Imperfection", *Computational Economics*, 38, pp. 241-260.

Arrow K.J. e Hurwicz L. (1960), "Stability of the gradient process in n-persons games", *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 8 (2), pp. 280-294.

Barucci E., Bischi G.I. e Gardini L. (1999), "Endogenous fluctuations in a bounded rationality economy: learning non perfect foresight equilibria", *Journal of Economic Theory*, 87, pp. 243-253.

Bischi G.I. e A.K. Naimzada (1997), "Global analysis of a nonlinear model with learning", *Economic Notes*, 26 (3), pp. 143-174.

Bischi G.I. e Naimzada A.K. (2000), "Global Analysis of a Duopoly game with bounded rationality", in *Advances in Dynamic Games and applications*, 5, pp. 361-385, Filar *et al.* (eds.), Birkhauser.

Bischi G.I. e Marimon R. (2001), "Global Stability of Inflation Target Policies with Adaptive Agents", *Macroeconomic Dynamics*, 5 (2), pp. 148-179.

Bischi G.I. e Kopel M. (2001), "Equilibrium Selection in a Nonlinear Duopoly Game with Adaptive Expectations", *Journal of Economic Behaviour and Organization*, 46 (1), pp. 73-100.

Bischi G.I., Dawid H. e Kopel M. (2003), "Spillover Effects and the Evolution of Firm Clusters", *Journal of Economic Behavior and Organization*, 50, pp. 47-75.

Bischi G.I., Chiarella C. e Kopel M. (2004), "The Long Run Outcomes and Global Dynamics of a Duopoly Game with Misspecified Demand Functions", *International Game Theory Review*, 6 (3), pp. 343-380.

Bischi G.I., Lamantia F. e Sbragia L. (2004), "Competition and cooperation in natural resources exploitation: An evolutionary game approach", in *Game Practice and the Environment*, pp. 187-211, C. Carraro and V. Fragnelli (eds.), Edward Elgar Publishing.

Bischi G.I. e Tramontana F. (2006), "Basins of attraction in an evolutionary model of boundedly rational consumers", *P.U.M.A. (PUre Mathematics and Applications)*, 16 (4), pp. 345-363.

Bischi G.I., Gallegati M., Gardini L., Leombruni R. e Palestrini A. (2006), "Herd Behavior and Non-Fundamental Asset Price Fluctuations in Financial Markets", *Macroeconomic Dynamics*, 10 (4), pp. 502-528.

Bischi G.I., Naimzada A.K. e Sbragia L. (2007), "Oligopoly Games with Local Monopolistic Approximation", *Journal of Economic Behavior and Organization*, 62, pp. 371-388.



Bischi G.I., Sbragia L. e Szidarovszky F. (2008), “Learning the Demand Function in a Repeated Cournot Oligopoly Game”, *International Journal of Systems Science*, 39 (4), pp. 403-419.

Bischi G.I., Chiarella C., Kopel M. e Szidarovszky F., *Nonlinear Oligopolies: Stability and Bifurcations*, Springer-Verlag (2010).

Bischi G.I., Lamantia F. e Radi D. (2013), “Multi-species exploitation with evolutionary switching of harvesting strategies”, forthcoming in *Natural Resource Modeling*.

Boulding K.E. (1991), “Some thoughts on the promises, challenges and dangers of an evolutionary perspective in economics”, *Journal of Evolutionary Economics*, 1, pp. 9-18.

Brock W.A. e Hommes C.H. (1997), “A rational route to randomness”, *Econometrica*, 65, pp. 1059-95.

Brock W.A. e Hommes C.H. (1998), “Heterogeneous beliefs and routes to chaos in a simple asset pricing model”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 22, pp. 1235-1274.

Chiarella C., Dieci R. e Gardini L. (2001), “Asset price dynamics in a financial market with fundamentalists and chartists”, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, vol. 6, pp. 69-99.

Chiarella C., Dieci R. e Gardini L. (2002), “Speculative behaviour and complex asset price dynamics: A global analysis”, *Journal Of Economic Behavior & Organization*, vol. 49, pp. 173-197.

Chiarella C., Dieci R. e Gardini L. (2005), “The dynamic interaction of speculation and diversification”, *Applied Mathematical Finance*, vol. 12, pp. 17-52.

Chiarella C., Dieci R. e Gardini L. (2006), “Asset price and wealth dynamics in a financial market with heterogeneous agents”, *Journal of Economic Dynamics & Control*, vol. 30, pp. 1755-1786.

Chiarella C., Dieci R., He X.-H. (2007), “Heterogeneous expectations and speculative behavior in a dynamic multi-asset framework”, *Journal of Economic Behavior & Organization*, vol. 62, pp. 408-427.

Chiarella C., Dieci R., Gardini L., Sbragia L. (2008), “A model of financial market dynamics with heterogeneous beliefs and state-dependent confidence”, *Computational Economics*, vol. 32, pp. 55-72.

Chiarella C., Dieci R., He X.-Z. (2011), “The dynamic behaviour of asset prices in disequilibrium: A survey”, *International Journal of Behavioural Accounting and Finance*, vol. 2, pp. 101-139.

Chiarella C., Dieci R., He X.-Z. and Li K. (2013), “An evolutionary CAPM under heterogeneous beliefs”, *Annals of Finance*, vol. 9, pp. 185-215.

Cournot A.A. (1838), *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*, Nathaniel T. Bacon, Trans. Macmillan, New York, 1927.

Cushing J.M. (1977), *Integrodifferential Equations and Delay Models in Population Dynamics*, Springer.

Dal Forno A. e Merlone U. (2010), “Effort dynamics in supervised work groups”, *Journal of Economic Behaviour & Organization*, 75, pp. 413-425.

Dawid H. e Neugart M. (2011), “Agent-based models for economic policy design”, *East Economic Journal*, 37, pp. 44-50.

Dieci R., Foroni I., Gardini L. e He X.-Z. (2006), “Market mood, adaptive beliefs and asset price dynamics”, *Chaos, Solitons and Fractals*, 29, pp. 520-534.

Dieci R. e Westerhoff F. (2010), “Heterogeneous speculators, endogenous fluctuations and interacting markets: A model of stock prices and exchange rates”, *Journal of Economic Dynamics & Control*, 34, pp. 743-764.

Dieci R. e Gallegati M. (2011), “Multiple attractors and business fluctuations in a nonlinear macro-model with equity rationing”, *Math & Computer Modelling*, 53, pp. 1298-1309.

Dosi G (1991), “What is evolutionary economics?”, *Journal of Evolutionary Economics*, 1 (1), pp. 5-8.

Dosi G. e Nelson, R.R. (1994), “An introduction to evolutionary theories in economics”, *Journal of Evolutionary Economics*, 4 (3), pp. 153-172.

Droste E., Hommes C.H. e Tuinstra J. (2002), “Endogenous fluctuations under evolutionary pressure in Cournot competition”, *Games and Economic Behaviour*, 40, pp. 232-269.

Fudenberg D. e Levine D.K. (1998), *The theory of learning in games*, MIT Press, Cambridge, MA.

Gardini L., Sushko I. e Naimzada A.K. (2008), “Growing through chaotic intervals”, *Journal of Economic Theory*, 143, pp. 541-557.

Hodgson G.M. (1993), *Economics and Evolution: Bringing Back Life into Economics*, University of Michigan Press.

Hodgson G.M. e Knudsen T. (2006), “Why we need a generalized darwinism and why generalized darwinism is not enough”, *Journal of Economic Behavior and Organization*, 61, pp. 1-9.

Hodgson G.M. e Knudsen T. (2010), “Generative replication and the evolution of complexity”, *Journal of Economic Behavior and Organization*, 75, pp. 12-24.

Hofbauer J. e Sigmund K. (1988), *The Theory of Evolution and Dynamical Systems*, Cambridge University Press.

Hommes C.H. (2001), “Financial markets as nonlinear adaptive evolutionary systems”, *Quantitative Finance*, 1, pp. 149-167.

Hommes C.H. (2009), “Bounded Rationality and Learning in Complex Markets”, *Handbook of Economic Complexity*, edited by J. Barkley Rosser, Jr., Cheltenham, Edward Elgar.

Hommes C.H. (2013), *Behavioral Rationality and Heterogeneous Expectations in Complex Economic Systems*, Cambridge University Press.

Kirman A.P. (1992), “Whom or what does the representative individual represent?”, *Journal of Economic Perspectives*, 6, pp. 117-136.

Matsumoto A. e Szidarovszky F. (2010), “Delayed Dynamics in Heterogeneous Competition with Product Differentiation”, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 11, pp. 601-611.

Matsumoto A., Szidarovszky F. e Yoshida H. (2012), “Dynamics in Linear Cournot Duopolies with Two Time Delays”, *Computer Science in Economics & Management*, 38 (3), pp. 311-327.

Menkhoff L. e Taylor M. (2007), “The obstinate passion of foreign exchange professionals: technical analysis”, *J. Econ Literature*, 45, pp. 936-972.

Ostrom E. (2000), “Collective Action and the Evolution of Social Norms”, *Journal of Economic Perspectives*, 14 (3), pp. 137-158.

Simon H.A. (1955), “A behavioral model of rational choice”, *The Quarterly Journal of Economics*, vol. 69, n. 1, pp. 99-118.

Simon H.A. (1956), “Rational choice and the structure of the environment”, *Psychological Review*, vol. 63, n. 2, pp. 129-138.

Simon H.A. (1997), *Models of Bounded Rationality*, Volume 3, MIT Press, New Haven.

Sethi R. e Somanathan E. (1996), “The evolution of social norms in common property resource use”, *The American Economic Review*, 86, pp. 766-788.

Taylor P. e Jonker L. (1978), “Evolutionarily stable strategies and game dynamics”, *Mathematical Biosciences*, 40, pp. 145-156.

Tesfatsion L., Judd K. (eds.) (2006), *Handbook of computational economics Vol. 2: Agent-based computational economics*, North-Holland.

Tramontana F., Gardini L., Dieci R. e Westerhoff F. (2009), “The emergence of Bull and Bear dynamics in a nonlinear model of interacting markets”, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Vol. 2009, pp. 1-30.

Tramontana F., Westerhoff F., Gardini L. (2010), “On the complicated price dynamics of a simple one-dimensional discontinuous financial market model with heterogeneous interacting traders”, *Journal of Economic Behaviour & Organization*, 74, pp. 187-205.

Vega-Redondo F. (1996), *Evolution, Games and Economic Behaviour*, Oxford University Press.

Weibull J.W. (1995), *Evolutionary Game Theory*, The MIT Press.

Westerhoff F. e Dieci R. (2006), “The effectiveness of Keynes-Tobin transaction taxes when heterogeneous agents can trade in different markets: a behavioral finance approach”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 30, pp. 293-322.

Young H. Peyton (1993), “The evolution of conventions”, *Econometrica*, 61 (1), pp. 57-84.

Young H. Peyton (1998), *Individual strategy and social structure*, Princeton University Press.