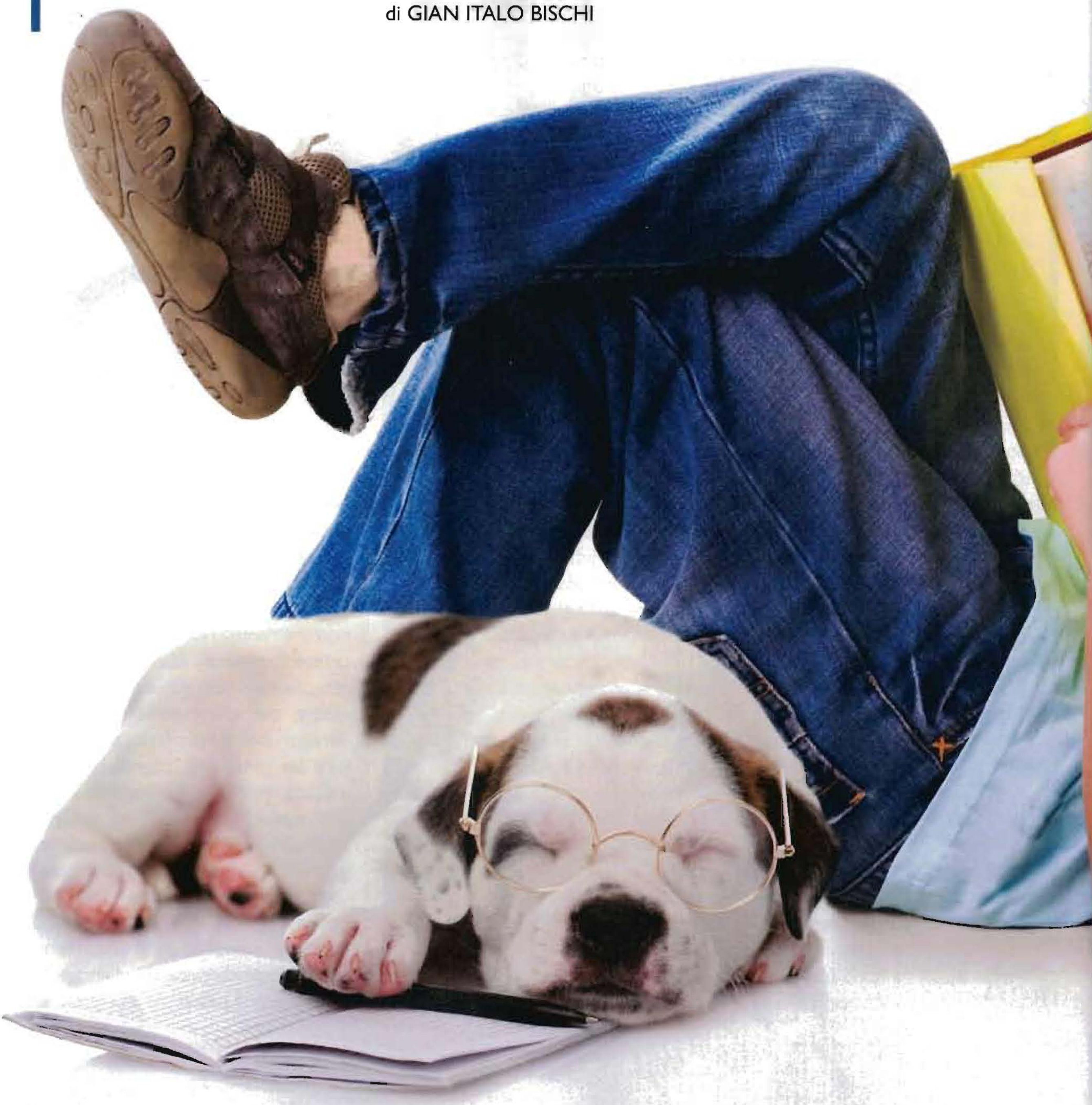
LA MATEMATICA?

Tanti studenti alla ripresa delle scuole pensano a equazioni, formule e teoremi come una fatica. E pensare che nacquero proprio per risparmiare le "energie". Alcuni esempi eclatanti in questa rapida carrellata

di GIAN ITALO BISCHI



Una scienza per pigri

Dopo il riposo estivo, per tanti studenti, ricominciare a studiare la matematica sembra proprio una bella fatica.
C'è chi suda solo a pensarci. Ma a noi piace andare controcorrente, e in questo articolo cerchiamo di convincervi che la matematica fa invece risparmiare fatica. Sono tante le situazioni in cui la conoscenza di nozioni matematiche, anche semplici, ci permette di risparmiare energie fisiche e mentali, oltre che tempo. Supponiamo, per esempio, di voler sapere quante mattonelle ci sono in una stanza rettangolare. Nessuno di noi si metterebbe a contarle tutte, è sufficiente contarle su due lati e poi eseguire la moltiplicazione. Se ci sono 20 mattonelle lungo un lato e 30 lungo l'altro arriviamo alla conclusione che ce ne sono esattamente 600 eseguendo (a mente, mi raccomando) una banale moltiplicazione. Un bel risparmio di fatica!
Prima di passare ad alcuni esempi di ragionamenti e formule matematiche che hanno consentito di risparmiare tempo e fatica, non va dimenticato il risparmio di scrittura che i matematici hanno introdotto con l'utilizzo di notazioni estremamente sintetiche e abbreviazioni. Un simbolismo che, sebbene possa apparire criptico e quasi incomprensibile ai non esperti, permette un enorme economia di pensiero, scrittura e, in definitiva, di fatica. Almeno a chi ne fa abitualmente uso.

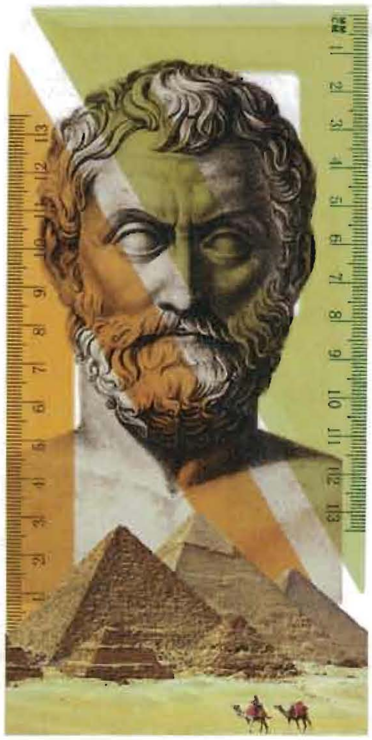
Come scrisse il poeta lucano Leonardo Sinisgalli, nella sua opera *Furor mathematicus* del 1944: «Lo sforzo dei matematici è consistito forse in questo: l'aver costruito il più formidabile sistema di abbreviazioni. I matematici hanno chiuso in un segno un concetto e un'operazione». E, in effetti, una formuletta ci consente talvolta di ricordare facilmente concetti difficili e anche di trasmetterli ad altri risparmiandoci tanti giri di parole.

L'ASTUZIA DI GAUSS

Il grande matematico Carl Friedrich Gauss (1777-1855) a soli nove anni si trovò a dover eseguire il seguente compito assegnato dal maestro: sommare i numeri da 1 a 100. Probabilmente quella mattina il maestro voleva starsene in pace a leggere il giornale mentre i bambini erano occupati a sommare numeri. Ma, con grande sorpresa (e, forse, disappunto) del maestro, il piccolo Carl consegnò dopo pochi secondi la lavagnetta con il risultato esatto: 5050.
Come aveva fatto? Probabilmente si era accorto che, eseguendo la somma per colonna, dopo aver scritto

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 96 + 97 + 98 + 99 + 100$$
$$S = 100 + 99 + 98 + 97 + 96 + \ldots + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

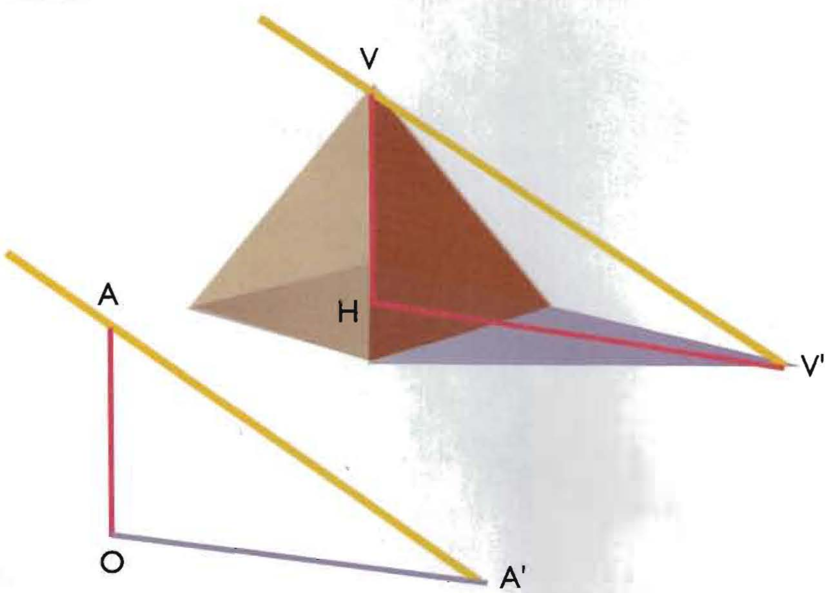
tutti gli addendi da 1 a 100 e nella riga sottostante gli addendi da 100 a 1 (vedi sopra) ogni colonna dà come somma 101, e poiché di colonne ce ne sono 100 basta fare il prodotto 100·101 e poi dividere per 2 (dato che sulle due righe compare due volte la somma S desiderata). Insomma, $(101 \cdot 100):2=101 \cdot 50=5050$, un calcolo facile da fare anche a mente! Qualcuno obietterà che però Gauss ha dovuto fare una dimostrazione. Questo è vero, ma una volta dimostrata quella formula in generale, cioè $n(n+1):2$ per un qualunque numero naturale n, può essere usata tutte le volte che si vuole, e con numeri ben più grandi di addendi. Per esempio, la somma dei primi 5000 numeri, ovvero $1+2+3+4+\ldots+5000 = (5000 \cdot 5001)/2 = 2500 \cdot 5001 = 12.502.500$, cioè 12 milioni, 502 mila e 500. Provate a eseguire la somma e capirete quanta fatica si risparmia con quella formula!



Altro famoso esempio, andando ancor più indietro nel tempo, lo offre Talete, noto studioso di geometria dell'antica Grecia, vissuto attorno al VI secolo a. C. a Mileto, città greca sulla costa sud-occidentale dell'Anatolia.

TALETE E LA PIRAMIDE

Il re d'Egitto gli chiese di misurare l'altezza di una piramide. Talete era un pigro, conduceva una vita ritiratissima dedicandosi ai suoi studi di filosofia, geometria e astronomia. Figuriamoci se aveva voglia di arrampicarsi su una piramide per misurarne l'altezza, per di più col caldo che fa in Egitto. Allora utilizzò le proprie conoscenze sui triangoli simili per escogitare il seguente metodo: conficcò un bastone in terra, vicino alla piramide, e ne misurò la lunghezza dell'ombra, poi misurò la lunghezza dell'ombra della piramide. Conoscendo l'altezza del bastone e la lunghezza delle due ombre, e sapendo che i raggi del sole si possono considerare paralleli, Talete poteva così calcolare l'altezza della piramide senza doversi arrampicare, utilizzando una proporzione che deriva dalla similitudine dei triangoli mostrati nella figura sotto: infatti, poiché i raggi del sole sono paralleli, i triangoli **AOA'** e **VHV'** sono simili e, quindi: OA:OA' = HV:HV', da cui: HV = HV'·OA:OA'



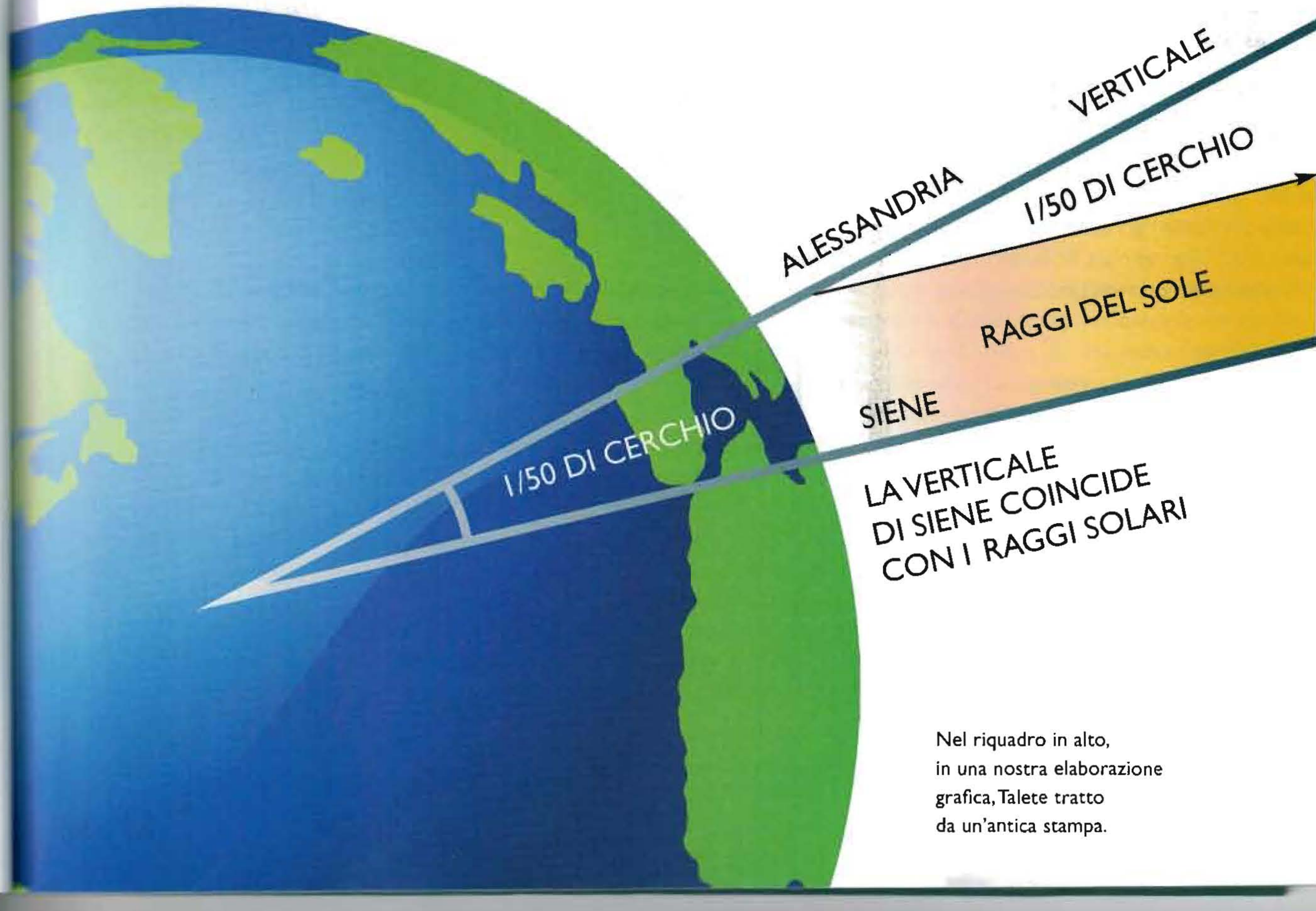
Per esempio, se l'ombra del bastone fosse doppia della sua altezza, allora anche l'ombra della piramide sarebbe doppia rispetto alla sua altezza.
Plutarco, scrittore e storico ateniese del primo secolo a. C., così riporta l'episodio: «[Il re] è rimasto singolarmente ben impressionato dal modo in cui hai misurato la piramide, [...], limitandoti a collocare il tuo bastone al limite dell'ombra proiettata dalla piramide stessa; formatisi, al contatto col sole, due triangoli, dimostrasti che la proporzione esistente fra la lunghezza del bastone e l'altezza della piramide era la stessa che intercorreva fra la lunghezza delle due ombre».

IL DIAMETRO DELLA TERRA

Un esempio ancor più evidente di risparmio di fatica grazie alle conoscenze matematiche lo offre Eratostene di Cirene, che nel III secolo a.C. riuscì addirittura a calcolare, senza grandi sforzi, la lunghezza di un meridiano terrestre. Il calcolo è rimasto famoso perché si basa su alcune semplici ipotesi e utilizza strumenti molto elementari. Eratostene viveva e lavorava ad Alessandria d'Egitto, come direttore della celebre biblioteca. Sapeva che a Siene, l'odierna Assuan nel sud dell'Egitto, a mezzogiorno del solstizio d'estate il Sole si trova allo zenit (Assuan si trova infatti sul Tropico del Cancro), e infatti il Sole poteva essere visto anche sul fondo di un pozzo profondo. Sapendo ciò, Eratostene ebbe l'idea di piantare ad Alessandria un bastone, di altezza nota, perpendicolarmente al terreno, e misurò la lunghezza dell'ombra che esso proiettava a terra.
Ipotizzando che la Terra sia sferica e che i raggi del Sole arrivino tutti paralleli fra di loro, Eratostene dedusse che l'angolo da lui misurato era uguale all'angolo al centro della Terra che sottende l'arco di circonferenza fra Alessandria e Siene.
Poiché conosceva la distanza fra le due città, impostò la proporzione che gli permise di determinare la lunghezza della circonferenza terrestre che passa per i Poli, che è proprio quello che noi oggi definiamo come la lunghezza di un meridiano. La proporzione è la seguente:

Distanza Siene-Alessandria:
Circonferenza della terra =
Angolo tra bastone e ombra: 360°

Il risultato della misura di Eratostene fu di circa 39.655 km, molto vicino ai 40.075 km attualmente accettati come misura attendibile. Insomma, niente male per una misura compiuta con mezzi rudimentali più di 2000 anni fa.
Ora un esempio in cui, usando un po' di matematica e qualche conoscenza di economia, si dimostra che industriali, artigiani o agricoltori non devono esagerare nel produrre se vogliono salvaguardare i propri guadagni. Una dimostrazione che ci conduce, quindi, a un principio di autolimitazione del lavoro (niente male per produttori pigri).
Impostiamo il problema come segue: sia q la quantità prodotta, sia c il costo unitario (cioè il costo per unità di quantità prodotta) e sia p il prezzo di vendita unitario (ovvero, il prezzo che viene pagato per una quantità unitaria). Fin dalle scuole elementari abbiamo imparato



Nel riquadro in alto,
in una nostra elaborazione
grafica, Talete tratto
da un'antica stampa.

a calcolare il ricavo come quantità per prezzo, $R=pq$, e il profitto come differenza fra ricavo e costo, dove il costo totale si ottiene, in modo analogo, come prodotto fra costo unitario e quantità prodotta, $C=cq$, da cui il ben noto

$$\textbf{Profitto} = R-C = pq-cq = (p-c)q$$

Da questa formula sembrerebbe che se $p>c$ (prezzo di vendita unitario maggiore del costo unitario di produzione) allora più è elevata la produzione q e più è elevato il profitto. Se così fosse ogni produttore tenderebbe a produrre sempre di più, nessuno si prenderebbe un momento di svago, perdere tempo significherebbe perdere denaro: produrre, produrre, e quindi lavorare, lavorare. Per fortuna non è così, perché nel modello proposto è stato trascurato il ruolo dei consumatori. Non sempre i consumatori sono disposti ad acquistare tutta la produzione immessa nel mercato al prezzo preteso dal produttore. Il quale, pur di non rimanere con merce invenduta, abbasserà i prezzi. Ma se la produzione è davvero eccessiva i consumatori non vorranno saperne di acquistare tutto quello che si produce, nemmeno se la merce venisse regalata, cioè nemmeno con $p=0$. In definitiva, il prezzo non è indipendente dalla quantità. Il problema quindi si complica. Se produco poco ovviamente guadagno poco, ma se produco troppo sono costretto ad abbassare i prezzi, e allora quello che ricavo rischia di non compensare i costi. Non sembra facile decide in una situazione così incerta e conflittuale.

Ci vuole un compromesso. Niente paura. Abbiamo detto che il prezzo è una funzione decrescente della quantità, e la più semplice funzione decrescente è la funzione lineare, il cui grafico è una retta, come nella figura qui sotto, la cui espressione si può scrivere come $p= a - bq$, dove a e b sono coefficienti che esprimono, rispettivamente, l'intercetta della retta con l'asse dei prezzi (quello indicato nel grafico come massimo prezzo che i consumatori sono disposti a pagare quando la merce è molto rara) e la pendenza della retta.

Con questa ipotesi, che rende più realistico il modello, cambia anche l'espressione dei profitti in funzione della quantità prodotta. Ora il ricavo, tenendo conto del legame fra prezzo e quantità, diventa $R= pq=(a- bq)q$, e di conseguenza avremo

$$\textbf{Profitto} = R-C = (a-bq)q - cq = -bq^2 + (a-c)q$$

il cui grafico è una curva ben nota a ogni studente delle scuole medie superiori: una parabola. Si tratta di una **parabola** (*vedi Glossario a pg 97*) concava caratterizzata da un bel punto di massimo. Non è difficile rendersi conto che in questo nuovo modello i profitti sono nulli non solo quando produco $q=0$ (ovviamente se non produco con guadagno) ma anche quando produco troppo, ovvero per $q\geq (a-c)/b$. E a metà fra questi due valori sta la produzione che mi dà il massimo guadagno. Pertanto, se la produzione è minore di $(a-c)/2b$ allora aumentando la produzione guadagno di più; se invece è uguale o superiore a quel valore... e se aumento la produzione sono uno sprovveduto. Anzi, se ho per caso prodotto di più mi conviene distruggere la produzione in eccesso, perché il massimo profitto lo ottengo solo con produzione pari a $(a-c)/2b$. ■